Mario Barra
(Dipartimento di Matematica, Facoltà di Scienze, Università di Roma "La Sapienza")

Insegnamento dinamico del calcolo delle probabilità seguendo le indicazioni di Bruno de Finetti

Si parla di Bruno de Finetti e di alcune considerazioni didattiche che riprendono qualche sua indicazione a proposito di argomenti di base, come la somma di numeri aleatori, la tendenza della loro distribuzione ad assumere una forma "a campana", la "Legge dei grandi numeri", il "Teorema del limite centrale", la "scambiabilità" e il teorema più noto dimostrato da de Finetti.

Nel centenario della nascita, cercherò di ricordare Bruno de Finetti, di cui è noto l'impegno per la didattica, limitandomi ad alcune note che ritengo poco conosciute.

- "*Fra i pensatori italiani che mi hanno maggiormente influenzato colloco al primo posto Bruno de Finetti e al secondo Giovan Battista Vico.*" Robert Nozich[1]
- "*Teoria delle probabilità [Einaudi 1970] di Bruno de Finetti è destinato certamente ad essere riconosciuto come uno dei grandi libri del mondo.*" Dennis V. Lindley[2]

- Le pubblicazioni di de Finetti (più di 400 fra articoli e libri) debbono essere considerate in tutti i lavori di probabilità e statistica ove si parli di fondamenti o di ragionamento induttivo.
- Bruno de Finetti è da tempo la fonte privilegiata dei più diffusi manuali di "management" e di "Statistica Applicata" della "Harvard School of Administration" e l'European Association for Decision Making, con sede ad Amsterdam, assegna ogni due anni, a partire dal 1995, un premio in onore di Bruno de Finetti cui partecipano scienziati e psicologi di tutto il mondo.
- Franco Modigliani, intervistato in occasione del Premio Nobel per l'Economia, disse che anche de Finetti avrebbe meritato il premio.

Bruno de Finetti, figlio di genitori italiani, nasce a Innsbruck (Austria) il 13 giugno 1906 e muore a Roma il 20 luglio 1985. A 21 anni si laurea in matematica a Milano. Consegue la libera docenza in Analisi matematica nel 1930 e pubblica, giovanissimo, molti articoli fondando le basi per i suoi contributi principali alla teoria delle probabilità secondo la concezione soggettivistica. Su questo argomento aprirà un dialogo o un'arguta polemica con R. Carnap, O. Neurath, E. von Mises, J.M. Keynes, M. Fréchet, G. Polya, H. Freudenthal, A. Kolmogoroff, E. Nagel, H. Reichenbach, T. Kuhn, L.Wittgenstein e K. Popper. Ad esempio, de Finetti dirà: *Popper non mi convince affatto in nessuna delle sue cose...* Alessandro Figà Talamanca, già Presidente dell'U.M.I., gli farà eco dicendo: *fra cento anni non si parlerà più di Popper, ma di de Finetti*.
Dal 1927 al 1931 de Finetti lavora all'Istituto Centrale di Statistica e dal '31 al '46 è a Trieste come attuario presso le Assicurazioni Generali e insegna all'università Matematica generale e Matematica finanziaria. Per tale materia vince, nel 1939, il concorso a cattedra che ricopre solo dopo otto anni, perché celibe e per una legge che impediva agli scapoli di ricoprire posizioni nel servizio pubblico. Dal 1951 al 1954 insegna Matematica finanziaria nella Facoltà di Economia di Trieste. Nel 1954 è a Roma a "La Sapienza" nella Facoltà di Economia e, dal 1961, in quella di Scienze MFN, nel Dipartimento di Matematica G. Castelnuovo, dove insegna Calcolo delle probabilità fino al 1976.
La sua filosofia accoglie gli stimoli del pragmatismo americano di fine '800, si collega al dibattito epistemologico sviluppatosi sulla relatività di Einstein, sull'indeterminismo di Heisenberg, sul neoempirismo viennese e sulla filosofia anglosassone, e si rifà esplicitamente a Hume, Poincaré, Tilgher e al pragmatismo di Vailati. L'importanza di de Finetti va oltre la probabilità e la statistica. Per esempio il suo lavoro *Il problema dei pieni*,[3] del 1938, può essere considerato come la

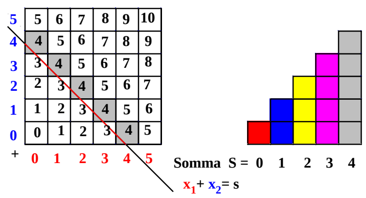
---

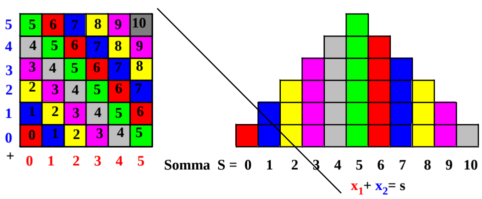
[1] Robert Nozich è un filosofo statunitense molto brillante, che insegna filosofia all'università di Harvard..
[2] D. V. Lindley, Direttore del Dipartimento di Statistica dell'Universita del Galles, è un probabilista di fama mondiale.
[3] De Finetti B. (1940). Il problema dei "pieni", *Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari*. 1-88.

fondazione della moderna teoria della finanza e contiene metodi e risultati che, circa dodici anni dopo, H. Markowitz otterrà indipendentemente, ricevendo per questi, nel 1990, il premio Nobel per l'economia e l'appellativo di "padre fondatore della moderna finanza".
L'impostazione soggettivistica del calcolo delle probabilità di de Finetti, comprende al suo interno le altre impostazioni e ne amplia le possibilità applicative fornendo *una guida per pensare ed agire nelle condizioni di incertezza che rappresentano la maggior parte dei problemi che affrontiamo.* La sua teoria viene anche riconosciuta come modello dell'apprendimento induttivo, e traduce *in forma matematica il punto di vista raggiunto nella filosofia con la penetrante critica di Hume*. Se, ad esempio, si afferma l'indipendenza stocastica degli eventi che vengono considerati, non può esserci alcun apprendimento, che invece è possibile richiedendo unicamente la *scambiabilità*, che de Finetti precisa e caratterizza con un modello matematico. Parlerò di questo e di altri argomenti, considerandone alcuni aspetti didattici. Inizio con un episodio. Alla proiezione del film di George Polya (Giorgietto) *How to solve it*, del 1973, (diapositive mosse da un pupazzo (Giorgietto) in mano a de Finetti, formule mostrate facendo finta che fosse il pupazzo a spostarle, …) de Finetti così commenta le modifiche che ha portato: *Di nuovo c'è l'uso dei colori: in ROSSO sono indicati i DATI (e poi, man mano, le cose che divengono note in funzione dei dati); in VERDE le INCOGNITE (ciò che si cerca, e le grandezze ausiliarie via via introdotte finché non sono state espresse mediante i dati). Il procedere del ragionamento consiste visivamente in collegamenti fra punti, che, man mano, da verdi divengono rossi… Polya accettò volentieri la diversa utilizzazione dei colori… Un perfezionamento possibile, se uno schema con le convenzioni suddette si facesse in animazione, consisterebbe nel far avvenire le variazioni con continuità …".*
Insomma, forse de Finetti stava pensando ad un software di geometria dinamica. Userò questa tecnologia seguendo la sua concezione della geometria che *si serve dell'intuizione spaziale, ma più che altro come di un potere magico per dar corpo e rappresentazione a concetti, situazioni, problemi, di carattere generalmente non per se stesso geometrico…; è insomma, per così dire, la dottrina dello schema mentale adatto per afferrare intuitivamente tutti i problemi* … Penso che la geometria possa essere utile per comprendere meglio e ricordare molti concetti della probabilità.

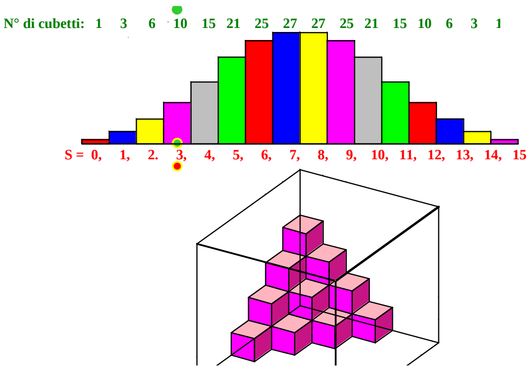
"Curva a campana"

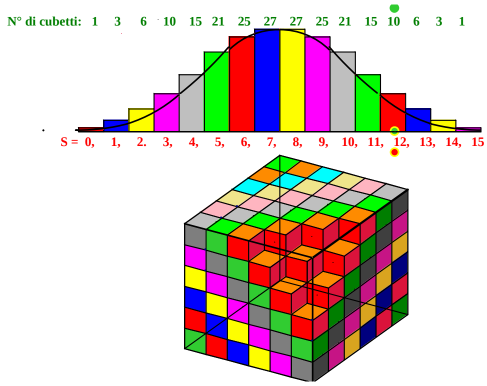
La geometria dinamica può chiarire vari aspetti relativi alla somma di numeri aleatori, rendendo più agevoli le dimostrazioni generali, sfruttando anche il movimento e il colore.





Partiamo dalla somma di due o di tre dadi che assumono i valori: 0, 1, 2, 3, 4, 5 con probabilità 1/6. Considerando il numero dei quadretti o dei cubetti, come nelle figure, si può visualizzare la distribuzione della somma, parlare di equità, di "triangoli di Tartaglia generalizzati" e comprendere che la distribuzione "a campana" per la somma di numeri aleatori, dipende essenzialmente dal fatto

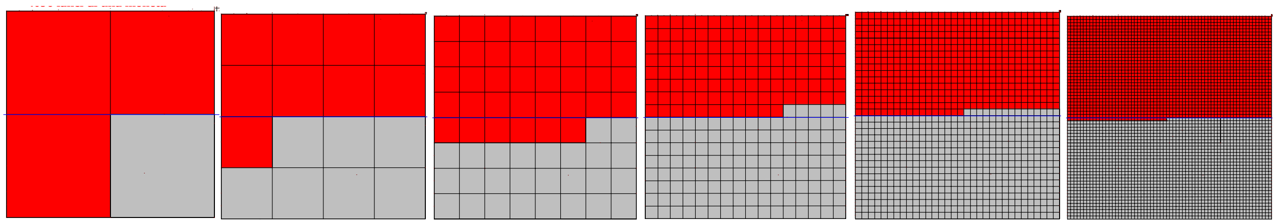




che i valori centrali si ottengono in un numero maggiore di modi.
Gauss non dice che, date certe premesse... la legge di probabilità risulta quella normale, ma invece che, per giustificare in modo assoluto l'uso dei pratici di basarsi spesso sulla media aritmetica, bisogna imporre alla legge di probabilità di avere la forma gaussiana...[4]

La “Legge dei grandi numeri”

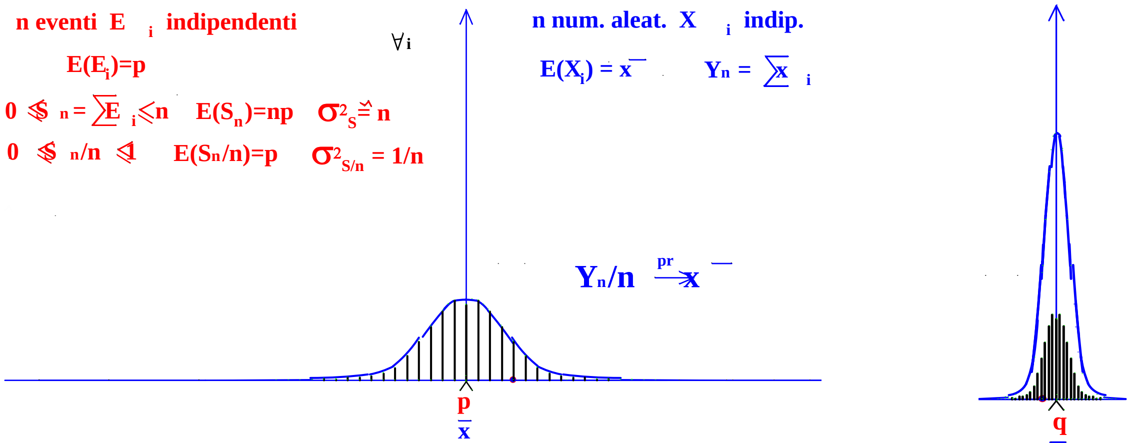
Su più di 1000 risposte, ottenute dal ’74, ad un questionario, alla domanda: *lanciando più volte una moneta "simmetrica" (p(testa)=1/2), il numero di teste tende al numero delle croci?*, la percentuale delle risposte affermative e quindi sbagliate è altissima (circa il 75%). C’è confusione tra frequenza relativa ed assoluta; ma si debbono contrastare anche argomentazioni del tipo: *se la frequenza relativa di testa "tende" a quella di croce, allora, se c'è stato un eccesso di teste, deve esserci un "recupero” delle croci*. Per far capire bene, non basta obiettare: *se c'è stato un eccesso di teste la moneta non può 'affrettarsi' a far aumentare il numero delle croci*. Indicando i numeri delle teste e delle croci con n_T e n_C, risulta in media $|n_T-n_C|\cong\sqrt{n}$, che non si annulla, e anzi tende all’infinito. Si tende a zero (come $1/\sqrt{n}$), solo dividendo per n per passare alle frequenze relative.[5] Indicando in un quadrato C^2 i risultati dei lanci con $n=n_T+n_C$ quadretti di colore differente per le teste e le croci, cresce la media di $|n_T-n_C|\cong\sqrt{n}$=(n° di quadretti su un lato di C^2), ma la differenza fra le percentuali dei colori tende a scomparire, mettendo in evidenza le proprietà indicate. Lo stesso, più in generale.



Infatti, la varianza σ^2 della somma di n eventi o numeri aleatori non correlati, è la somma delle loro varianze, così σ^2 e σ crescono come n e $\sqrt{n}$ e, dividendo per n, lo scarto va a zero come $1/\sqrt{n}$. Così la distribuzione delle frequenze relative tende a collassare sulla media dimostrando in generale la “Legge dei grandi numeri”, senza scomodare la disuguaglianza di Cebysev. Viene anche indicata l’utilità di una accortezza didattica. Infatti, quanto detto per eventi si visualizza dinamicamente con una distribuzione che si stringe intorno a p. Ma nei rettangoli usati nelle prime figure per indicare le probabilità, si deve aumentare l’altezza affinché l’area totale rimanga unitaria, dando l’impressione che aumentino le probabilità delle frequenze relative. Conviene allora rappresentare tali probabilità

---

[4] de Finetti B. (1934). Come giustificare elementarmente la 'legge normale' …, *Periodico di Matematiche*, n.4. 197-210.
[5] “Esce testa” o la somma di n di tali eventi, hanno varianze ¼ e n/4, e risulta $\sigma^2=4\cdot n/4=n$, per $n_T-n_C=n_T-(n-n_T)=2n_T-n$. Dunque σ, che misura per eccesso la media di $|n_T-n_C|=2n_T-n$, vale $\sqrt{n}$ e $1/\sqrt{n}$ per le frequenze relative.



Le distribuzioni di Sn o di Yn, dividendo per n, tendono alla loro media
con dei segmenti, per chiarire che ciò che aumenta è la loro vicinanza, cioè la loro "densità" intorno a p, in modo analogo a quanto avviene nel continuo per i numeri aleatori, rispetto alla loro media. Infine, quanto detto può suggerire alcune "immagini dinamiche" relative al "Teorema del limite centrale". Infatti, ad esempio nel caso di testa e croce, dividendo la somma degli eventi, non per n, come in precedenza, ma per il suo scarto quadratico medio, $\sigma=\sqrt{n}$, come richiede il teorema, la nuova distribuzione si dilata gradualmente, su una base infinita come $\sqrt{n}$ (che risulta dalla divisione per $\sqrt{n}$ del numero di successi che aumenta come n), ma la distribuzione, con la sua forma "a campana", mantiene ora la varianza unitaria, come quella della distribuzione Normale, a cui tende.

A proposito della "scambiabilità" e del teorema più famoso di de Finetti

A volte le assicurazioni considerano la percentuale di incidenti indipendentemente dall'ordine in cui sono avvenuti. E' un caso di *scambiabilità* che esiste se, per ogni h ($0 \leq h \leq n$), la probabilità $\omega_h^{(n)}$ che si verifichino h successi su n eventi qualsiasi, è uguale per tutte le $\binom{n}{h}$ permutazioni di questi. Bruno de Finetti dimostra che la scambiabilità vale sse si tratta di una *mistura* di distribuzioni bernoulliane, cioè di una loro combinazione lineare a coefficienti non negativi e somma unitaria. Tali coefficienti *posso* sempre assegnarli *come se* fossero le probabilità p_i di ipotesi differenti H_i che esprimono una mia incertezza: *se è vera l'ipotesi H_i di probabilità* p_i, *considero questa bernoulliana, se vale H_j, quest'altra* ... Per l'indipendenza stocastica delle bernoulliane, $\omega_h^{(n)}$ non varia scambiando gli eventi, che restano così scambiabili anche nella mistura di tali distribuzioni. Non si conserva invece l'indipendenza, perché le informazioni modificano le probabilità p_i. E' un bene: ora l'esperienza permette quell'apprendimento impedito dall'indipendenza stocastica. Occorre unicamente la formula di Bayes che, nell'impostazione di de Finetti, si può dimostrare. Forse anche l'incomprensione di questi aspetti può giustificare l'avversione all'induzione di Popper.
Un esempio. Il questionario già menzionato termina con queste domande:
- a) In un'urna U ci sono 2 palline: bianche (B) o nere (N). Le composizioni possono essere: NN, BN, BB e in base alle informazioni disponibili, si assegna uguale probabilità, 1/3, alle 3 ipotesi.[6] Si estrae da U una pallina a caso. Qual è la probabilità che sia bianca?
- b) Dall'urna precedente, vengono estratte una pallina bianca, che si rimette nell'urna, e poi ancora una pallina bianca, anch'essa reimbussolata. Si effettua una terza estrazione. Qual è ora la probabilità di estrarre una pallina bianca? Cioè quanto vale $p(B_3/B_1B_2)$?

La risposta corretta, nel caso a), è ½ ed è individuata molto spesso per simmetria, oppure perché $p(B) = 0 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$. Quasi tutti, se rispondono, continuano ad indicare ½, anche nel caso b), perché *c'è reimbussolamento*, non considerando che già dopo il sorteggio della prima pallina bianca si annulla la probabilità dell'ipotesi che l'urna contenga due palline nere.

---
[6] Le probabilità delle ipotesi vengono "necessariamente" assegnate uguali nello schema di Laplace.

Nessuno degli intervistati ha risposto correttamente: $p(B_3/B_1B_2)=\dfrac{p(B_1B_2B_3)}{p(B_1B_2)}=\dfrac{0\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{3}}{0\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{3}}=\dfrac{9}{10}$.

Supponiamo invece che in 10 estrazioni, sempre con reimbussolamento, siano comparse b bianche, con $1\leq b\leq 9$. A questo punto qualunque persona di buon senso dovrebbe dire che la probabilità di estrarre una pallina bianca in una successiva estrazione è ½ (l'urna contiene soltanto due palline e sono usciti i due colori!). Tuttavia, se si guardasse soltanto la frequenza in queste 10 estrazioni, si dovrebbe invece concludere che la probabilità è divenuta b/10. Se poi, in generale, si obietta che per conoscere una qualsiasi probabilità, sono necessarie molte prove, visto che è impossibile chiederne infinite, si richiede comunque di farne un *mucchio*.
Nulla si potrà dire finché il numero è insufficiente per formare un mucchio perché la probabilità si determina solo quando *finalmente il nonmucchio si trasforma in mucchio.* Ma quando … ? [7]

[7] de Finetti B. (1970). *Teoria delle probabilità.* Torino: Einaudi. 570.