

Was ist Wahrscheinlichkeit?

Antworten, konstruktivistisch betrachtet

Christian Hennig

Abstract: Die Stochastik ist die mathematische Theorie der Wahrscheinlichkeit. Es herrscht die Vorstellung, dass klar sei, was ein Satz der Form „Die Wahrscheinlichkeit von A beträgt 0.35“ in der Realität bedeutet. Sofern sich StochastikerInnen darüber jedoch überhaupt Gedanken machen, ist die Bedeutung umstritten. In diesem Artikel werden die bekanntesten Konzepte Frequentismus und Subjektivismus anhand von Texten von von Mises (1951), de Finetti (1981) sowie zwei neuere Ansätze diskutiert. Es zeigt sich, dass eine befriedigende Klärung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs bis heute nicht gelungen ist und wohl auch nicht gelingen kann.

Die konstruktivistische Philosophie (siehe dazu z.B. von Foerster, 1993) bietet die Möglichkeit eines neuen Blickes auf die Konstruktionen „realer Wahrscheinlichkeit“, indem die Blickrichtung weggelenkt wird von der unbeantwortbaren Frage, welche Vorstellungen „wirklich wahr“ sind. Stattdessen kann die Frage behandelt werden, welche Vorstellungen über die Wirklichkeit ein Mensch akzeptieren muss, um die behandelten Wahrscheinlichkeitsbegriffe anzunehmen, und welche Wirklichkeiten durch die Konzepte erst hergestellt werden. Den Anspruch, prüfbar zu sein, kann keines erfüllen.

1 Einführung

Stellen Sie sich vor, Sie sind krank und gehen zu Ihrer Ärztin¹. Die Ärztin verordnet Ihnen ein Medikament. Auf Ihre Nachfrage hin sagt sie: „Das Medikament wird Sie mit einer Wahrscheinlichkeit (WK) von 90% heilen.“ Wissen Sie, was Ihre Ärztin damit meint? Glauben Sie, dass Ihre Ärztin es selber weiß? Im Normalfall wird sie eine entsprechende Rückfrage nicht beantworten können. Kann sie es aber doch, so hat sie verschiedene Möglichkeiten:

1. Sie hat das Medikament bei 20 PatientInnen ausprobiert und 18 wurden geheilt.
2. Sie glaubt, dass, wenn sie immer mehr PatientInnen mit diesem Medikament behandeln würde, sich die relative Häufigkeit der Erfolge bei genügend großer PatientInnen-Zahl bei 0.9 stabilisieren wird.
3. Sie hält 90 Euro für den fairen Einsatz einer Wette, bei der sie 100 Euro bekommt, wenn Sie geheilt werden (d.h. insbesondere, dass sie die Wette auf jeden Fall eingehen würde, wenn man ihr weniger Einsatz abverlangen würde).
4. Ein statistischer Test mit der Irrtums-WK 10% hat die Wirksamkeit des Medikamentes bewiesen.

¹Zugegeben: Es gibt angenehmere Vorstellungen.

Die vier Antworten schließen sich nicht unbedingt aus, aber sie bedeuten nicht dasselbe. Weder kann man von 1 auf 2, noch umgekehrt schließen. Es ist klar, dass man nicht erwarten kann, dass sich die Erfahrung 1 bei den nächsten 20 PatientInnen exakt wiederholt. Variante 3 muss nicht auf Wiederholbarkeit beruhen. Die Ärztin kann ihren Wetteinsatz von allen Informationen abhängig machen, die sie über Sie hat, auch denen, die charakteristisch für Sie alleine sind.

Mathematisch ist ein WK-Maß eine Abbildung, die Ereignissen eine Zahl zwischen 0 und 1 zuordnet und den Kolmogorowschen Axiomen (Kolmogorow, 1933) genügt: Nichtnegativität, Normiertheit, (σ -)Additivität.

Welche Idee von WK, welche „Realität“ wird durch dieses Konstrukt modelliert? Möglichkeit 1 entspricht dem auf Bernoulli (1899, Original 1713) zurückgehenden klassischen WK-Begriff: Verhältnis der Anzahl der Erfolge zur Anzahl der Möglichkeiten bei endlich vielen Möglichkeiten. Schnell² tauchten Probleme auf, bei denen keine endliche Anzahl von Möglichkeiten abgezählt werden konnte. Bereits zur Modellierung eines fairen Spieleinsatzes beim Wurf eines unsymmetrischen oder manipulierten Würfels ist das klassische Konzept nicht geeignet, denn eine Manipulation durch Anbringen von Gewichten verändert ja die Anzahl der Möglichkeiten nicht.

Bayes (1908, Original 1763) definierte WKen deswegen bereits über den fairen Spieleinsatz und nicht über das Verhältnis zwischen Erfolgen und Möglichkeiten. Die Idee der subjektivistischen WK (Möglichkeit 3) wurde im 20. Jahrhundert von de Finetti (1993, Original 1936) ausgearbeitet. De Finetti lässt jedem Subjekt die Freiheit, eine persönliche Wahrscheinlichkeit festzulegen. So weit war Bayes noch nicht gegangen.

Der Versuch, WK über Stabilisierung bei sehr großen bzw. unendlichen Wiederholungen zu definieren (Frequentismus), beginnt im 19. Jahrhundert und erreicht mit von Mises (1951, erstmals 1919) seinen Höhepunkt. Bei beiden Konzepten handelt es sich um unterschiedliche Verallgemeinerungen des Bernoullischen Ansatzes, bei dem das Verhältnis von Erfolgen und Möglichkeiten in Spielsituationen synonym mit dem fairen Spieleinsatz verwendet wurde.

Der klassische WK-Begriff spielt heute zwar im Unterricht noch eine große Rolle, in der Wissenschaft dominiert jedoch der Frequentismus bei zunehmendem Zulauf zur „Bayes-Statistik“, die vielfach subjektivistisch interpretiert wird. Möglichkeit 4 beruht offenbar auf einem Missverständnis der statistischen Testtheorie, aber ich möchte nicht ausschließen, dass 4 die Antwort wäre, die man, abgesehen von „weiß nicht“ am häufigsten zu hören bekäme, wenn man zum obigen Thema tatsächlich eine Umfrage machen würde.

In diesem Artikel möchte ich Konzepte für die Bedeutung des Begriffes „WK“ ausgehend von Frequentismus und Subjektivismus beleuchten. Es wird sich zeigen, dass auch diese Konzepte mit Unklarheiten beladen sind. In jüngster Zeit sind Alternativen vorgeschlagen worden, von denen zwei ebenfalls behandelt werden. Diese Alternativen haben ihren Sinn, sind jedoch meines Erachtens nicht geeignet, die Unklarheiten über die Bedeutung von WK in der Realität zu lösen. Nützlich erscheint mir zu diesem Zweck eher die konstruktivistische Philosophie

²Angeregt bereits von Bernoulli selbst.

zu sein (z.B. von Förster, 1993, Bochumer Arbeitsgruppe, 1992), die die Fragestellung nach der objektiv vorhandenen WK als unsinnig entlarvt, und mit deren Hilfe stattdessen nach der Bedeutung der Konzepte für die Wirklichkeit der Individuen gefragt werden kann.

Exemplarisch werde ich die Arbeiten von von Mises (1951), de Finetti (1981), Walley (1991) und Davies (1995) behandeln; wenn die entsprechenden Autoren ohne Jahreszahl zitiert sind, sind immer diese Arbeiten gemeint³.

Der neue Aspekt dieses Artikels ist die konstruktivistische Sichtweise. Zumindest von Mises, de Finetti und Walley gehen davon aus, dass ein mathematischer WK-Begriff ein sinnvolles Abbild einer real existierenden WK ist. Ihre Texte handeln davon, was sie sei und wie die Mathematik sie zu modellieren habe, und was es dabei für offensichtliche Schwierigkeiten gibt. Ein konstruktivistischer Ansatz hingegen erkennt an, dass die Realität unabhängig von menschlichen Konzepten nicht beobachtbar ist. Der mathematische WK-Begriff ist daher wesentlich an der Herstellung der realen WK-Vorstellung beteiligt, die abzubilden vorgegeben wird. Ich interessiere mich also für die Frage, welche Vorstellung von der Realität (bzw. welche „BeobachterInnen-interne“ Realität) durch die WK-Konzepte der Autoren induziert und hergestellt wird.

Das Problem, wie man einen der objektiven Realität angemessenen WK-Begriff definieren müsste, und welcher der diskutierten Ansätze diesbezüglich am richtigsten ist, ist vom konstruktivistischen Standpunkt aus bedeutungslos. In diesem Sinne sind die hier diskutierten Konzepte, insbesondere Frequentismus und Subjektivismus, vereinbar, wenn man erkennt, dass sie sich auf unterschiedliche Vorstellungsebenen beziehen.

Dagegen wirft die hier vertretene Sichtweise stärkere grundsätzliche Bedenken gegen die Sinnhaftigkeit der mathematischen Formalisierung in vielen Anwendungsgebieten auf, als sie die behandelten Autoren offenbar haben.

Ich beobachte, dass AnwenderInnen der mathematischen WK-Theorie häufig keinerlei Angaben darüber machen, welche Vorstellung sie von WKen in der „Realität“ haben. Allenfalls berufen sie sich auf den frequentistischen oder Bayesianischen Ansatz, ohne jedoch die damit verbundenen Schwierigkeiten in irgendeiner Form zu diskutieren. Die Mathematik der axiomatisierten WK-Theorie ist nicht von irgendeiner Vorstellung über die Realität abhängig. Daher führt die Rechnung innerhalb geeigneter WK-Modelle zu Ergebnissen. Diese Ergebnisse müssen zwar für die Anwendung interpretiert werden, aber man begnügt sich im Allgemeinen mit dem Erklärungs-Niveau, eine WK sei ein Maß für die Tendenz, ob ein Ereignis vermutlich eher passieren wird oder nicht. Das Problem, inwiefern sich soetwas überhaupt messen lässt, wird ausgeklammert. Dieser Umgang mit der WK-Theorie wird häufig als „pragmatisch“ bezeichnet. Diese Bezeichnung ist dann gerechtfertigt, wenn man unter „pragmatisch“ versteht, dass bestimmte Fragen eine Antwort finden, die so formuliert sind, dass sie die Schwierigkeiten des Begriffes verbergen. Der Konstruktivismus lehrt, dass eine solche Antwort, als Richt-

³Es sei darauf hingewiesen, dass die zitierten Autoren selber die Konzepte der anderen, und häufig auch ihre eigenen, ausführlich diskutieren. Viele meiner Argumente sind den Arbeiten selbst entnommen, die im Original zu lesen ich jedem empfehlen kann.

linie des Handelns benutzt, ihre eigene Realität schaffen kann, ohne dass man sich Gedanken darüber machen müsste, wie ihre Korrektheit oder Sinnhaftigkeit zu überprüfen wäre. „Pragmatische“ AnwenderInnen können durcheinander frequentistische, subjektivistische, datenanalytische und „unpräzise“ Schlussweisen verwenden (dieses führt zu so seltsamen theoretischen Richtungen wie „objektiver Bayesianismus“), ohne sich mit der Bedeutung ihrer Interpretationen befassen zu müssen. Ich ziehe jedoch einen alternativen Pragmatismus vor, der es vorzieht, Interpretations-Probleme zu suchen statt zu verstecken, und sie als Möglichkeit begreift, sich ein differenzierteres Bild von den interessierenden Sachverhalten zu machen.

2 Das konstruktivistische Wirklichkeitskonzept

Was trägt eine konstruktivistische Betrachtungsweise zum Thema „Was ist Wahrscheinlichkeit“ bei? Ich diskutiere zwei Ansatzpunkte: Das Verhältnis des Konstruktivismus zur Objektivität, und den Aspekt des Konstruierens von Wirklichkeit.

Der Mensch hat keinen direkten Zugang zu einer wie auch immer gearteten *wirklichen Wirklichkeit*. Der Terminus „wirkliche Wirklichkeit“ wird im Unterschied zu „Wirklichkeit“ verwendet, wobei „Wirklichkeit“ die personale, also subjektive Konstruktion einer Wirklichkeit, die sich ein Individuum macht, bedeutet. „Wirkliche Wirklichkeit“ ist dagegen der Bezeichner für eine objektiv vorhandene „Realität als solches“ außerhalb der Einzelperson und unabhängig von BeobachterInnen. Dazu schreibt die Bochumer Arbeitsgruppe (1992):

Realität kommt nicht einfach durch unsere Sinnesorgane in unseren Kopf hinein und repräsentiert sich dort (Abbildtheorie oder naiver Realismus), sondern sie wird als Wirklichkeit konstruiert. Alle konstruktivistischen Richtungen gehen davon aus, dass es keine Erkenntnis ohne Erkennende gibt und geben kann. Es gibt keine Beobachtungen ohne BeobachterInnen: Alles, was gesagt wird, wird von jemandem gesagt. Da somit keine Erkenntnisaussage über die Welt jemals zu trennen ist von der Person, die die „erkennende“ Aussage über die Realität macht, ist klar, dass die Realität als solche nicht erkennbar ist. Dies nennen wir, Glasersfeld folgend, den epistemologischen Solipsismus.

KonstruktivistInnen wird oft zu Unrecht vorgeworfen, sie würden keine außerhalb von ihnen existierende Welt anerkennen (*ontologischer Solipsismus*). Tatsächlich ist eine außerhalb des Individuums existierende Welt Bestandteil der Wirklichkeit, wenn das Individuum sie konstruiert. Eine solche Konstruktion ist auch bei KonstruktivistInnen normalerweise anzutreffen. Insbesondere beobachten KonstruktivistInnen gerne, wie mittels Kommunikation Wirklichkeit konstruiert wird, wozu sie natürlich Kommunikation und Gemeinschaft konstruieren und beobachten müssen. Heinz von Förster (1993) formuliert sogar «*Wirklichkeit = Gemeinschaft*». Entsprechend kann man auch von der Wirklichkeit sozialer Systeme sprechen.

Die wirkliche Wirklichkeit ist also unbeobachtbar. Aus ihrer Beschaffenheit kann nichts gefolgert werden und sie ist daher ein uninteressantes Konzept. Das ist unabhängig von der

Frage nach ihrer tatsächlichen Existenz, die allerdings ebenfalls uninteressant ist⁴.

Aus diesen Vorstellungen ergibt sich eine grundsätzliche Kritik an jeder Art von Wissenschaft, die behauptet, „objektive“ Aussagen zu machen. Solche Aussagen sind ohne Bedeutung - jedenfalls ohne Bedeutung bezüglich dessen, was vorgeblich ihr Inhalt ist, nämlich der wirklichen Wirklichkeit. Allerdings haben derlei Aussagen offenbar Einfluss. Objektivität ist immer normativ. Falls in einem sozialen System ein Faktum⁵ als objektive Wahrheit behandelt wird, sind alle Konsequenzen daraus zwingend. Das heißt:

- Wer die objektive Wahrheit nicht anerkennt, wird sozial sanktioniert (z.B. mit schlechten Noten bestraft, für verrückt erklärt, entlassen etc.).
- Objektive Wahrheiten schränken Handlungsspielräume ein, denn wenn die Voraussetzungen einer Handlung als „wahr“ gelten, können daraus abgeleitete Konsequenzen als „Sachzwänge“ gelten.

Bezüglich wissenschaftlicher Aussagen wird häufig gesagt, sie könnten nicht als absolute Wahrheiten gelten, jedoch als Approximation an die Wahrheit. Das ändert jedoch nicht viel, denn das Konzept „Approximation“ setzt ein Approximiertes voraus, und die Möglichkeit, Nähe zwischen Approximation und Approximiertem zu beurteilen.

Im Übrigen besteht eine Nachfrage nach objektiver Wahrheit, die von der Wissenschaft bedient wird. Der Hauptgrund dafür scheint mir zu sein, dass objektive Wahrheit ein allgemein anerkanntes Rechtfertigungsinstrument ist. Zum Beispiel lässt sich Rationalisierung viel angenehmer mit den Gesetzen des Marktes rechtfertigen als mit persönlicher Gewinnsucht. Aus objektiver Wahrheit lassen sich scheinbar notwendige Handlungsanweisungen herleiten, die von der Willkür der Handelnden unabhängig sind. Das heisst, dass man für seine Entscheidungen nicht selber verantwortlich gemacht werden kann.

Zu diesem Zweck eignet sich insbesondere die Mathematisierung hervorragend, da die mathematische Logik den Ruf hat, aus Voraussetzungen zwingende Folgerungen herleiten zu können. Die komplizierte Analyse eines mathematischen Modells kann verwendet werden, um über die Willkürlichkeiten der Modellwahl hinwegzutäuschen. Die Entscheidungen der ModelliererInnen werden der Diskutierbarkeit entzogen, während in vielen Fällen (z.B. bei der unkritischen Verwendung statistischer Standardverfahren) die einzige Begründung, die sie anführen könnten, darin besteht, dass es eben jeder so macht und ihnen keine Alternativen bekannt sind.

Der zweite Ansatzpunkt einer konstruktivistischen Sichtweise liegt im Begriff „Konstruktion“. Wirklichkeiten werden als konstruiert betrachtet. Aus konstruktivistischer Sicht sind folgende Fragen interessant: „Wer konstruiert was, wie, warum und mit welchen Folgen?“ Es

⁴Ich schreibe, wenn ich in diesem Text irgendwelche Behauptungen aufstelle, über *meine* Wirklichkeit. Diese Wirklichkeit beinhaltet dieselben soliden materiellen Erscheinungen wie vermutlich die Wirklichkeit der meiste LeserInnen. Der Konstruktivismus bestreitet keineswegs, dass es diese Dinge gibt. Allerdings haben wir keine Möglichkeit, unsere Konstruktionen davon mit irgendeiner objektiven Beschaffenheit zu vergleichen. Wir können unsere Konstruktionen allenfalls durch andere Konstruktionen hinterfragen.

⁵D.h. etwas *Gemachtes*.

geht bei der Kritik der Vorstellungen von der wirklichen Wirklichkeit nicht darum, die wissenschaftliche Konstruktion von Wirklichkeiten grundsätzlich zu verdammen. Menschen müssen konstruieren, und es gibt keine Einwände dagegen, das wissenschaftlich zu tun. Das soll in diesem Zusammenhang heißen: Mit Bezug auf beobachtbare Wirklichkeit und auf begründete und systematische Weise. Dabei entscheidet das sich ständig verändernde soziale System Wissenschaft, was „begründet und systematisch“ ist. Diese Entscheidung wird normalerweise weder einig, noch stabil sein, obwohl viele Kriterien der Wissenschaftlichkeit offenbar auf Verständigung und Einigkeit ausgerichtet sind. Dazu gehört die Empirie, d.h. die Bezugnahme auf Beobachtbares. Obwohl jede Beobachtung von der BeobachterIn abhängt, lässt sich offenbar über materielle Beobachtungen vergleichsweise einfach Einigung herstellen.

Es lässt sich allerdings beobachten, dass die vorgeblich objektiv und vom Forschungsobjekt distanziert arbeitende Wissenschaft durch ihre Begriffsbildung und ihre Vorgehensweisen nicht etwa ihre Objekte realitätsnah erfasst, sondern sie (d.h. ihre Wahrnehmung durch die Menschen) verändert bzw. überhaupt erst herstellt. Da sie ihren Anspruch auf Objektivität aufrecht erhält, wird diese Konstruktionsfunktion häufig verschleiert. Ich möchte in diesem Artikel untersuchen, welche Wahrnehmungen von den einzelnen WK-Begriffen hergestellt werden, und wie man sehen kann, dass der Anspruch auf Objektivität nicht eingelöst wird.

3 Die Wirklichkeit der Wahrscheinlichkeitserfinder

Prinzipiell soll anerkannt werden, dass unterschiedliche Konzepte von „Wahrscheinlichkeit“ - d.h. unterschiedliche personale Wirklichkeiten - im Umlauf sind und es keine objektive Entscheidung über „richtig“ und „falsch“ und auch nicht über „sinnvoll“, „weniger sinnvoll“ und „unsinnig“ gibt⁶. Das gilt nicht nur für die philosophischen oder mathematischen Vorstellungen, sondern auch für die Konstruktionen aus der Alltagswelt. Die Frage „Was ist Wahrscheinlichkeit?“ kann daher keine einfache Antwort haben. Wir können uns aber Vorstellungen über die Wirklichkeit der Wahrscheinlichkeitserfinder⁷ machen. Die Frage, ob es in der wirklichen Wirklichkeit tatsächlich Grenzwerte von relativen Häufigkeiten, quantifizierbare Grade subjektiver Ungewissheit oder gar „untere subjektive WKen“ gibt, ist kein interessantes Diskussionsthema. Ich möchte zeigen, dass es sinnvoll ist, die Konzepte als Erfindungen zu betrachten, die insofern „wirklich“ sind, als dass sie unsere Wahrnehmung geprägt haben. Jedoch lässt sich ihre objektive Existenz nicht anhand von materiellen Beobachtungen beweisen oder auch nur überzeugend belegen. Ich vermute, dass das Gesagte nicht nur für WKen, sondern allgemein für „reale“ Konstrukten gilt, die Menschen versuchen, mathematisch zu erfassen.

⁶Natürlich bleibt es jedem Individuum überlassen, sich von eigenen, nach eigenem Dafürhalten schlecht begründeten Vorstellungen zugunsten anderer (z.B. „wissenschaftlicher“) Vorstellungen zu trennen.

⁷Unter den behandelten Autoren leider keine -Innen.

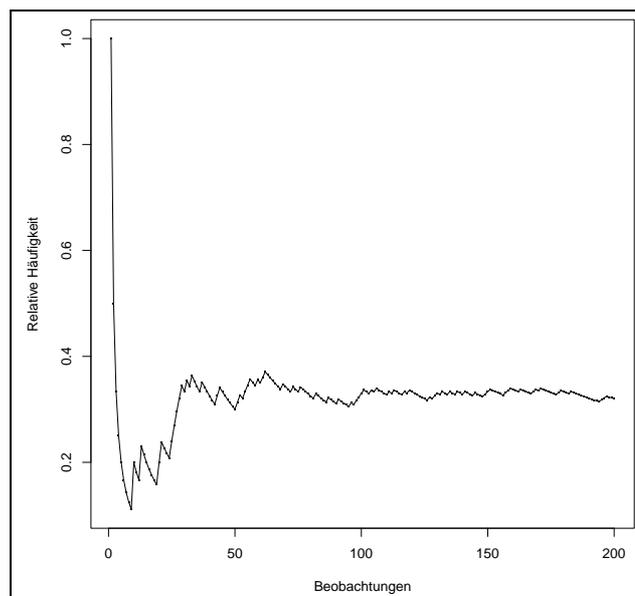


Abbildung 1: Sich „stabilisierende“ relative Häufigkeiten bei Computer-Pseudo-Zufallszahlen

3.1 Richard von Mises: Frequentismus

Der Frequentismus ist die verbreitetste Interpretation des WK-Begriffs. Für Richard von Mises wird eine WK definiert auf der Grundlage eines „Kollektivs“. Das ist eine Folge von möglichen gleichartigen Beobachtungen, die (im Idealfall) unendlich sein soll. Die WK eines Ereignisses A ist dann der Grenzwert der relativen Häufigkeit des Eintretens von A .

Richard von Mises versucht eine «*synthetische Begriffsbildung*» und räumt die «*Unzulänglichkeit der gedanklichen Nachbildung der empirischen Tatsachen*» ein. Damit ist bereits klar, dass seine Begriffe keine rein abstrakten Konzepte sein sollen: Er möchte WKen als «*physikalische Eigenschaften*» der untersuchten Phänomene modellieren.

Von Mises rechtfertigt seine Begriffe mit einer Vorstellung von «*Wirklichkeitstreue im wesentlichen*». Es geht ihm darum, die objektive Realität zu approximieren.

Den Grundbegriff des Kollektivs definiert von Mises als

eine lange Folge von Einzelbeobachtungen, bei der die Vermutung berechtigt erscheint, dass die relative Häufigkeit des Auftretens jedes einzelnen Beobachtungsmerkmals einem bestimmten Grenzwert zustrebt.

Der Grenzwertbegriff setzt (ebenso wie von Mises' spätere mathematischen Argumente) voraus, dass eine solche Folge als unendliche denkbar ist.

Unendliche Folgen sind jedoch nicht beobachtbar. Obendrein ist der Grenzwert einer Folge bekanntlich unempfindlich gegenüber der beliebigen Abänderung endlich vieler Folgenglieder. Es ist also aus mathematischer Sicht grundsätzlich unmöglich, von endlich vielen beobachteten Folgengliedern auf den Grenzwert der Folge zu schließen. Trotzdem nennt von Mises ein Indiz dafür, dass sich die Folgen relativer Häufigkeiten vieler in der WK-Rechnung betrachte-

ter Kollektive einem Grenzwert nähern: Er nennt es «*Erfahrungstatsache*», dass sich bei Zufallsvorgängen die relativen Häufigkeiten bei wachsender Beobachtungszahl stabilisieren (siehe Abb. 1). Von diesem Eindruck aus macht es Sinn, so von Mises, sich vorzustellen, dass die Folge gegen einen Grenzwert konvergiert. Dieses Argument findet sich in fast allen frequentistisch orientierten Lehrbüchern und führt dazu, dass für uns der Gedanke des stabilen Grenzwertes der relativen Häufigkeit mittlerweile vertraut ist. Das galt zu Bernoullis Zeit offenbar nicht, wie dem 4. Teil seiner *Ars conjectandi* (1899/1713) zu entnehmen ist.

Mathematisch ist das Argument vollkommen haltlos. Die relative Häufigkeit ist definiert als Eintrittshäufigkeit aus n Versuchen geteilt durch n . Die maximale Veränderung dieser relativen Häufigkeit bei der n -ten Beobachtung ist maximal $\frac{1}{n}$, wird also mit wachsendem n immer kleiner. Das bedeutet, dass es mathematisch notwendig ist, dass die Folge *den Eindruck* macht, immer weniger zu schwanken - unabhängig davon, ob die Folge tatsächlich gegen einen Grenzwert konvergiert oder nicht⁸.

Von der (auch von anderen AutorInnen) sogenannten „Erfahrungstatsache“ bleibt also, abgesehen von der mathematischen Notwendigkeit der optischen Stabilisierung, kein zusätzlicher Erfahrungsanteil mehr übrig. Die Grenzwert-Definition von WK ist offenbar eine freie Erfindung.

Diese Erfindung schließt die Vorstellung ein, dass eine Beobachtungsfolge, von der endlich viele Glieder beobachtet wurden, auf gleichartige Weise unendlich verlängerbar ist. Mit anderen Worten: Von Mises' WKen sind grundsätzlich als über die Zeit unveränderlich gedacht. Die Vorstellung, man könnte mit Hilfe von Beobachtungen aus der Vergangenheit die Zukunft prognostizieren, kann mit einem solchen Konzept nicht bewiesen werden, weil sie von der Begriffsbildung bereits vorausgesetzt wird.

Es wird vielfach behauptet, dass das sogenannte „Gesetz der großen Zahlen“ mathematisch beweist, dass man mit sehr (jedoch endlich) vielen Beobachtungen der tatsächlichen WK eines Ereignisses nahe kommt. Etwas genauer besagt das Gesetz, dass für ein vorgegebenes beliebig kleines ϵ die relative Häufigkeit des Eintreffens des Ereignisses für hinreichend große Beobachtungszahl *mit hoher WK* weniger als ϵ abweicht. Das Gesetz ist selbst *in Begriffen von WK* formuliert, und das bedeutet, dass es nur dann für die Beobachtungswelt interpretierbar ist, wenn man eine Interpretation des WK-Begriffes *voraussetzt*. Es ist also in keiner Weise geeignet, die frequentistische Interpretation zu belegen, denn ohne dass man bereits von einer solchen Interpretation ausgeht, ist das Theorem außerhalb des mathematischen Formalismus' völlig bedeutungslos, wie von Mises selbst in seinem „vierten Vortrag“ herausarbeitet.

Eine weitere Forderung bei von Mises ist die „Regellosigkeit“. Der Grenzwert der relativen Häufigkeiten darf sich bei Auswahl einer Teilfolge der Beobachtungen nicht verändern. Also ist eine ständig alternierende Erfolg-Misserfolg-Folge ausgeschlossen, da der Grenzwert 0.5

⁸Man beachte, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$. Dass die Zuwächse dieser unendlichen Summe immer kleiner werden, hindert sie nicht daran, jede Schranke zu überwinden. Fine (1973, S. 91 ff.) beweist, dass jede Folge relativer Häufigkeiten unregelmäßiger, also zufälliger Ereignisfolgen sich notwendig „scheinbar stabilisiert“, was gar nichts über ihren Grenzwert aussagt.

bei Auswahl jeder zweiten Stelle nicht erhalten bliebe. Von Mises benötigt diese Forderung für die mathematische Herleitung der WK-Theorie. In von Mises' Buch kommt das Wort „Zufall“ nicht vor, die Regellosigkeits-Forderung ist im Grunde eine Definition einer Zufallsfolge. Der Begriff der Regellosigkeit ist von mathematischer Seite stark kritisiert worden. Wie von Mises im „dritten Vortrag“ ausführt, muss die Forderung eingeschränkt werden, um mathematisch sinnvoll zu sein. Es ist möglich zu fordern, dass z.B. alle Teilfolgen der Form „jede k .Stelle“ zum selben Grenzwert führen. Entsprechend können andere Teilfolgen ausgewählt werden. Unter *allen* möglichen Teilfolgen findet sich jedoch immer auch eine, die nur aus Beobachtungen besteht, in denen das Ereignis, dessen WK zur Diskussion steht, eintritt. Der Grenzwert ist hier 1, auch wenn der Grenzwert im Gesamtkollektiv nur $\frac{1}{2}$ ist.

Aus konstruktivistischer Sicht ist interessant, dass das mathematische Problem daher kommt, dass Regellosigkeit universal definiert werden soll. Es ist kein Problem, zu fordern, dass eine Beobachtungsfolge *irgendwelchen bestimmten* Regeln nicht genügt. Dieses wäre eine Formalisierung dessen, was eine BeobachterIn zufällig findet, die nur auf bestimmte Regelmäßigkeiten achtet. Es lässt sich jedoch nicht sinnvoll beschreiben, wie eine Folge aussieht, die für *beliebige* hypothetische BeobachterInnen zufällig aussieht. Da von Mises eine objektive Realität approximieren will, geht er nicht den Weg, Regellosigkeit BeobachterInnen-abhängig zu definieren, und er kann seine mathematischen KritikerInnen letztlich nicht befriedigen.

In vielen Lehrbüchern wird von Mises' Ansatz heute als „nicht erfolgreich“ oder mindestens „problematisch“ bezeichnet, was im Wesentlichen auf die Probleme der Regellosigkeits-Forderung zurückgeht. In denselben Lehrbüchern wird jedoch WK unter Verweis auf von Mises über die frequentistische Grenzwert-Vorstellung motiviert.

Das liegt daran, dass es trotz der erwähnten Probleme wohl keine klarere, durchdachtere Darstellung des frequentistischen Konzeptes gibt. Die bei von Mises offen gelegten Schwierigkeiten sind anscheinend bereits in der Grenzwert-Vorstellung angelegt.

Der Kontrast zwischen der Selbstverständlichkeit, mit der heute vielerorts von der Grenzwert-Vorstellung ausgegangen wird, Häufigkeits-Beobachtungen gemacht werden, um Wahrscheinlichkeiten einzuschätzen einerseits, und der mathematischen Haltlosigkeit der grundlegenden Verbindung zwischen Modell und Realität andererseits fällt auf. Die FrequentistInnen haben Wirklichkeit geschaffen, wo ohnedies keine gewesen wäre.

Aus konstruktivistischer Sicht spricht im Übrigen gar nichts gegen von Mises' Frequentismus als frei erfundenes Gedankenkonzept, für oder gegen das man sich frei entscheiden kann. Von der objektiven Realität, die dadurch approximiert werden soll, fehlt allerdings jede Spur.

3.2 Bruno de Finetti: Personaler Subjektivismus

De Finetti schreibt:

Es gibt keinen Schlüssel zu einem Wundergarten, in dem zwischen Zaubergräsern und Wunderbäumen die „Probabilitis realis“ blüht. Diese Wunderblumen, die Meinungen ersetzen

sollten, würden die Schaffung derselben durch den Verstand erübrigen und damit jene Belastung über unserem Hals, nämlich den Kopf, überflüssig machen.

De Finetti hat sich ausführlich mit von Mises auseinander gesetzt. Er kritisiert am Frequentismus den Objektivitäts-Anspruch, der nicht einhaltbar ist. Da „reale“ WKen für ihn unbeobachtbar sind, verallgemeinert er die klassische Wahrscheinlichkeit von Bernoulli und Laplace auf andere Weise. Ein sinnvoller WK-Begriff ist für ihn eine Quantifizierung des Gefühl eines Individuums darüber, ob ein Ereignis eintreffen wird. Die subjektive WK kann sich von Mensch zu Mensch unterscheiden.

Beobachtbarkeit ist für de Finetti zentral für wissenschaftliche Begriffsbildungen. Die subjektiven WKen einer Person sind nach seiner Vorstellung zu beobachten über die Einsätze, die diese Person in Wettspielen über das zu bewertende Ereignis zu bringen bereit ist. De Finetti definiert primär den Erwartungswert einer Zufallsgröße. Die subjektive WK eines Ereignisses A ist dann die Erwartung der Zufallsgröße, die beim Eintreffen von A den Wert 1 und sonst den Wert 0 annimmt. Folgendes Verfahren schlägt de Finetti (unter anderem) vor:

Gegeben ist eine Zufallszahl X und Du musst einen Wert \bar{x} wählen, wobei feststeht, dass Du nach dieser Wahl jede Wette mit dem Gewinn $c(X - \bar{x})$ annehmen musst, wobei c (positiv oder negativ) durch einen Gegner frei gewählt werden kann⁹.

\bar{x} wird als *Erwartung* (oder Wert) von X bezeichnet. Die mathematischen Eigenschaften des Erwartungswertes bzw. die WK-Axiome lassen sich aus der folgenden Forderung folgern:

Es wird vorausgesetzt, dass Du nicht den Wunsch hast, Wetten abzuschließen, die für Dich einen sicheren Verlust bedeuten, daher ist eine Menge Deiner Erwartungen kohärent, wenn unter den Wettkombinationen, zu deren Annahme Du Dich verpflichtet hast, keine sind, welche Gewinne ergeben, die all uniform negativ¹⁰ sind. Die für \bar{x}_i im Voraus gewählten Werte müssen derart sein, dass sich für keine Linearkombination $Y = c_1(X_1 - \bar{x}_1) + \dots + c_n(X_n - \bar{x}_n)$ ergibt, dass $\sup Y$ negativ ist.

Diese Forderung begründet auch den Sinn der WK-Theorie als Wissenschaft, denn aus gewissen Anfangsbewertungen können damit notwendige Bewertungen, also WKen für abgeleitete Ereignisse gefolgert werden.

Bei Bernoulli und Laplace waren der Wert eines Gewinns bei Eintreffen von A und das Verhältnis günstiger zu möglichen Fällen noch synonym behandelt worden. In diesem Sinne liefern sowohl von Mises als auch de Finetti legitime Verallgemeinerungen. Sie konstruieren

⁹Auf den ersten Blick mutet dieses Kriterium etwas eigenartig an. De Finetti führt zur Verdeutlichung das Prinzip „Der eine teilt den Kuchen, der andere sucht aus“ an. Der Gegner kann sich für die vorteilhaftere Seite entscheiden und für Dich ist es am besten, wenn beide Seiten gleich attraktiv sind. Dabei kann man sehen, dass das Spiel für Dich in jedem Fall schlecht ist, wenn der Gegner mehr weiß als Du. Eine Implikation davon ist, dass Du bei einer WK von 0.25 für ein Ereignis sowohl bereit sein musst, 25 Euro auf 100 Euro bei Eintreffen des Ereignisses zu wetten, als auch 75 Euro auf denselben Gewinn beim gegenteiligen Ausgang.

¹⁰D.h. unabhängig davon, welches Ereignis auch immer eintritt. In diesem Fall macht der Gegner sicheren Gewinn.

damit einen Unterschied (nämlich zwischen persönlicher Bewertung und realer Tendenz), den es 100 Jahre früher noch nicht gab.

Der Grundgedanke des Subjektivismus ist dem des Konstruktivismus verwandt. Er benötigt keine Annahmen über die wirkliche Wirklichkeit irgendwelcher Erscheinungen außerhalb des Subjektes. WKen werden definiert über ein Konstruktionsverfahren, das jedem Menschen die Freiheit (und Verantwortung) zu unterschiedlichen Bewertungen lässt. Diese Eigenschaft der de Finetti'schen WKen hat sie leider bei vielen WissenschaftlerInnen unpopulär gemacht. Die Fachliteratur ist voll von Arbeiten, in denen zwar die Mathematik der subjektivistischen WKen, d.h. das Rechnen ausgehend von kohärenten *a priori*-WK-Vorbewertungen angewandt wird; die Vorbewertung selber jedoch wird oft nicht dem Subjekt freigegeben, sondern es werden dafür Standard-Verteilungen benutzt, die die Abwesenheit einer irgendwie tendenziösen subjektiven Meinung modellieren sollen. Die VertreterInnen dieser Richtung meinen, den Subjektivismus damit gegen den Vorwurf mangelhafter wissenschaftlicher Objektivität verteidigen zu können, während dieser „Mangel“ aus meiner Sicht ein Vorzug ist.

Die Idee, dass das angegebene Konstruktionsverfahren das menschliche WK-Gefühl misst, führt einige weitere Vorstellungen mit sich. De Finetti nimmt an, dass jeder Mensch ein WK-Gefühl hat, und weiter, dass dieses sinnvoll eindimensional quantifizierbar ist. Das ist keineswegs selbstverständlich, wenn man bedenkt, dass WKen vor Ende des 17. Jahrhunderts außerhalb von Glücksspiel-Situationen nicht quantifiziert worden sind.

Um eine solche Quantifizierung vorzunehmen, braucht man ein Messinstrument, und ein wesentlicher Teil des subjektivistischen Instrumentes ist der Geldwert. Irgendeine Werteinheit wird benötigt, die für alle Menschen in jeder Situation denselben Wert hat. De Finetti weiß, dass das problematisch ist, und verwendet Geld mangels besserer Alternativen. Da viele Menschen vom Geldspiel grundsätzlich nichts halten oder zum vorgeschlagenen Spiel zu vorsichtig sind, ist die Messung mit diesen Menschen nicht durchführbar, oder nur gegen ihren Willen. Sie können sich den Algorithmus allenfalls vorstellen. Jedoch fordert de Finetti, dass es bei dem Wettspiel um Dinge gehen muss, die für das Subjekt einen wirklichen Wert haben, damit sie motiviert sind, alle nötigen Informationen einzuholen und gewissenhaft zu verwerten, um zu einer möglichst guten WK-Bewertung zu kommen. Praktikabel scheint das nur in Form einer erfolgsabhängigen Bezahlung an Menschen zu sein, die professionell WKen schätzen müssen, wie z.B. GeologInnen bei der Bestimmung geeigneter Bohrgebiete für Rohstoffe.

Die Kohärenzforderung führt zu der Frage: Was passiert, wenn ein Mensch im freien Wettspiel für verschiedene Zufallsgrößen inkohärente Wahrscheinlichkeiten angibt? Zunächst heißt das, dass die aus den Axiomen hergeleitete WK-Theorie für ihn keine Bedeutung hat, da sich die Axiome nur aus der Kohärenz herleiten lassen. De Finetti stellt sich für die WK-Bewertung einen kommunikativen Prozess zwischen dem Menschen, dessen subjektive WK erhoben wird, und der messenden WK-TheoretikerIn vor. Im Zuge dieses Prozesses können inkohärente Wertzuweisungen bemerkt und korrigiert werden. Die Menschen werden also förmlich zur Kohärenz

gedrängt; der Aufbau impliziert, dass Kohärenz positiv bewertet wird¹¹. Wenn jedoch die Bewertung des Subjektes sich durch den Einfluss des Messprozesses ändert, ist nicht klar, ob das Ergebnis des Messprozesses eine WK-Bewertung des Subjektes ist oder eine WK-Bewertung, die das Subjekt nach Maßgabe der WK-Theorie haben *sollte*. D.h. es ist nicht klar, ob die Begriffsbildung deskriptiv oder normativ ist. Die Freiheit der Person sind offenbar zumindest dann Grenzen gesetzt, wenn sie eine WK-Bewertung hervorbringen möchte, auf die sich die mathematische Theorie anwenden lässt.

Die Anwendung der subjektivistischen Theorie hat eine weitere Konsequenz. Das Prinzip der WK-Theorie besteht darin, dass die Person vor Beginn eines Experimentes bzw. der Geschehnisse, die das Eintreffen oder Nicht-Eintreffen bestimmter Ereignisse zur Folge haben, mit Hilfe der zitierten Wettspiele ihre Bewertungen macht. Wenn dann einige der Experimente durchgeführt sind, können die WKen für weitere Ereignisse (unter Kohärenzforderung) mathematisch aus den Vorbewertungen und den ersten Ergebnissen hergeleitet werden. Das ist das Prinzip der subjektivistischen Prognose. Man verliert die Möglichkeit, flexibel und sprunghaft zu reagieren, denn die späteren Bewertungen ergeben sich durch mathematische Logik aus den früheren Bewertungen, nicht jedoch aus weiteren Entscheidungen. Logik ist jedoch zeitlos:

Jede Folgerung, die ich aus „Wenn es morgen regnet, gehe ich nicht in den Park“ gezogen habe, wird ungültig, wenn mich eine irgendwie geartete Ausnahme dazu bringt, meine Meinung zu ändern. Formuliere ich „Wenn es morgen regnet, gehe ich in nicht den Park, abgesehen von nicht näher bestimmten Ausnahmen“, ist die Aussagenlogik nicht anwendbar. In der subjektiven WK-Theorie kann ich nur dann auf besondere Vorfälle reagieren, wenn ich vor Beginn der Experimente jedem dieser Vorfälle eine WK zugeordnet habe. Es darf also nichts passieren, womit ich wirklich nicht gerechnet habe.

De Finettis Begriffsbildung lässt, was die „äußere“ Realität anbetrifft, sehr freie Vorstellungen zu. Weniger frei ist jedoch die Vorstellung über das menschliche WK-Denken. Jeder Mensch, der sich darauf einlässt, sollte prüfen, ob ihm die impliziten Annahmen der Bewertbarkeit durch Geld, des Zwanges zur Kohärenz und der Determiniertheit der späteren Handlungen durch die mathematischen Folgerungen aus den Vorbewertungen recht sind.

Viele dieser Aspekte werden von de Finetti offen und erhellend diskutiert, und er ist sich des Behelfs-Charakters seiner Konstruktion bewusst (von „Approximation der Realität“ ist bei ihm nicht die Rede). Leider findet sich von den sich selbst immer wieder hinterfragenden Gedanken eines Bruno de Finetti in der heutigen Anwendung seiner Konzepte wenig wieder. Die Mehrheit der heutigen „BayesianerInnen“ mag ihm im Kern seiner Idee nicht folgen, dass die Wissenschaft dem Menschen seine WK-Bewertungen nicht vorschreiben sollte.

¹¹Auch das ist nicht selbstverständlich. Es ist nicht garantiert, dass eine GegnerIn, die sicher Gewinn machen kann, diese Möglichkeit auch nutzt, anstatt eventuell auf einen unwahrscheinlicheren, doch größeren Gewinn zu hoffen. D.h. auch inkohärente Bewertungen *können* in der Endabrechnung Gewinn machen.

3.3 Peter Walley: Unpräzise Wahrscheinlichkeiten

Das Konzept „Wahrscheinlichkeit“ bekam im 20. Jahrhundert in den Wissenschaften im Gefolge der Physik eine immense Bedeutung. Die Grundlegung des Begriffs, bei der de Finetti und von Mises in den dreißiger Jahren zu den Pionieren gehörten, hinkte dieser Tendenz hinterher. Die offensichtliche Unbeobachtbarkeit der von Mises'schen Grenzwerte und mehr noch de Finettis Freiheit für die Willkür der Subjekte ließen Grundlagen-interessierte WissenschaftlerInnen unbefriedigt. Doch die Hoffnung auf ein standfesteres objektives Fundament erfüllte sich auch durch die Vorschläge von Philosophen wie Carnap und Popper (siehe Fine, 1973) nicht. Bis heute werden neue Vorschläge zur Definition und Grundlegung des WK-Begriffs gemacht.

Auf zwei dieser Vorschläge möchte ich eingehen. Peter Walley kommt aus der subjektivistischen Tradition und sieht WKen als einen Gradmesser für Unsicherheit und Glauben an das Eintreffen eines Ereignisses an.

Walley liefert keine neue Erklärung für den durch Kolmogorows Axiome definierten WK-Begriff. Stattdessen schlägt er in Reaktion auf einige in den Abschnitten 3.1 und 3.2 behandelten Probleme die Verwendung „unpräziser WKen“, die anderen Axiomen genügen, vor. Auch bei ihm ist die WK ein Maß für den Glauben eines Subjekts an ein bestimmtes Ereignis, aber er modelliert zusätzlich den Grad der Sicherheit, den diese WK-Zuweisung für das Subjekt hat. Auch sein Begriff hat mit Wetten zu tun: Die theoretische Bereitschaft des Individuums zu bestimmten Wettspielen ist ausschlaggebend: Die „untere WK“ eines Ereignisses A ist der höchste Einsatz, den das Subjekt *auf jeden Fall* zu bringen bereit ist für eine Auszahlung von 1 im Falle des Eintreffens von A . Die „obere WK“ ist ein Preis, den unser Subjekt für 1 im Falle des Eintreffens von A in jedem Fall zu teuer fände. Im Unterschied zu den vorherigen Konstruktionen ist damit Walleys WK nicht durch eine präzise Zahl zwischen 0 und 1, sondern durch eine untere und eine obere Schranke eines Intervalls definiert.

Die „unpräzisen WKen“ bringen gegenüber de Finettis Konzept eine wesentliche Erweiterung. Walleys Subjekt muss den angemessenen Wert des Eintreffens eines Ereignisses nicht genau angeben: „Dass es morgen regnet, hat für mich eine untere WK von 0.15 und eine obere von 0.6.“ Das bedeutet nach Walleys Interpretation, dass das Subjekt auf jeden Fall bereit wäre, 15 Euro auf 100 Euro Gewinn bei Regen zu setzen, jedoch höchstens 40 auf 100 bei Nicht-Regen. Wer gar keine Lust hat zu wetten, kann immer 0 und 1 als untere und obere WK angeben. Diese Verweigerungshaltung würde jedoch dazu führen, dass es keine Möglichkeit mehr gäbe, mit Hilfe der ohnehin komplizierten mathematischen Theorie der unpräzisen WKen noch irgendetwas Sinnvolles zu folgern. Walley stellt sich vor, dass jemand, der über einen bestimmten Sachverhalt wenige Informationen besitzt, obere und untere WK eher weit auseinander wählt, während eine ExpertIn (z.B. eine MeteorologIn im obigen Beispiel) zwar nicht genau das Wetter prognostizieren, aber doch wenigstens eine fast identische obere und untere WK angeben kann. Auf dieser Grundlage zeigt die Theorie, dass sich bei Erhöhung der Beobachtungszahl obere und untere WK aufeinander zubewegen. Ebenso wie bei de Finetti benötigt Walleys mathematischer Aufbau eine Kohärenzforderung und eine eindimensionale Messgröße. Er nennt seine

Währung passenderweise «*something You desire*».

Fallen lässt Walley de Finettis Anspruch der direkten Beobachtbarkeit. Es ist ein Unterschied, Werte anzugeben, zu denen man eine Wette eingehen *würde*, oder tatsächlich zu wetten. Wählt ein Mensch untere und obere WK weit auseinander, so findet er entweder keine BuchmacherInnen, die ihm im Siegfal z.B. in allen Fällen 100 für 10 (bei unterer WK 0.1, oberer WK 0.9) zahlt, oder aber er wird sich ziemlich sicher sein können, Gewinn zu erzielen. Wenn es um reale Wetten geht, ist er gut beraten, seine Angaben abhängig von den verfügbaren WettgegnerInnen zu machen, und der Abstand zwischen oberer und unterer WK wird mehr mit der SpielerInnen-Mentalität des Subjektes zu tun haben als mit der Kompetenz.

Da Walley die Unsicherheit des Menschen in zwei Dimensionen fassen will, nämlich Informiertheit (gemessen durch den Abstand) und die Stärke des Glaubens an das Eintreten von *A* (gemessen durch die Höhe von oberer und unterer WK), verzichtet er darauf, konkrete Wettspiele zu fordern. Stattdessen enthält sein Buch einen Katalog von Anforderungen an die „Rationalität“ der Subjekte, insbesondere die Vereinbarkeit der WK-Bewertungen mit der „Evidenz“. Die Willkür des Individuums, der de Finetti so viel Freiheit gegeben hat, möchte er wieder einschränken. Anhand einer gegebenen Menge von Informationen sollen unterschiedliche Menschen nach seinen Vorstellungen zu möglichst einheitlichen Bewertungen kommen, und er hofft, dass die unpräzisen WKen dazu eher geeignet sind als die subjektivistischen. Rationalität lässt sich jedoch nicht messen, und daher bleiben Walleys Vorstellungen, wie diese Vereinheitlichung vor sich gehen soll, im Dunkeln. Walley sieht, dass von Mises Postulate über die wirkliche Wirklichkeit nicht befriedigend zu belegen sind, doch sein eigenes Werk wird immer dann unklar, wenn er Objektivität auf andere Weise verankern möchte. So attraktiv die Idee der oberen und unteren WKen auch ist, sie verführt anscheinend dazu, die Freiheit der individuellen Entscheidungen in der Wissenschaft gegenüber dem Subjektivismus wieder einzuschränken (was viele WissenschaftlerInnen und wohl auch Walley selbst für einen Fortschritt halten). Für den Glauben, dass die unpräzisen WKen wegen der zwei Dimensionen der wirklichen Wirklichkeit näher kämen als de Finettis offenkundig konstruktiver Ansatz, kann auch Walley keine überzeugenden Argumente finden.

3.4 Laurie Davies: Mathematik approximiert Datensätze

Davies' Ausgangspunkt ist der Bezug auf unbeobachtbare unendliche Grenzwerte bei den FrequentistInnen, sowie die offenkundige praktische Undurchführbarkeit der de Finettischen Wettspiele in den komplexen Situationen, die in der modernen Datenanalyse die Regel sind¹².

Während von Mises und de Finetti versuchen, die mathematische Axiomatik für WKen aus der Realität, d.h. ihren Interpretationen herzuleiten, geht Davies den umgekehrten Weg. Er betrachtet WKen als vorgegebene mathematische Konstrukte, die man in Begriffen von Daten

¹²Um mit Hilfe Bayesianischer Verfahren z.B. Ausreißer und fehlerhafte Daten modellieren zu können, müsste eine DatenanalytikerIn vor der Erhebung der Daten für beliebige Arten von Fehlern und deren Folgen subjektive Wahrscheinlichkeiten angeben.

interpretieren kann. Das schwache Gesetz der großen Zahlen für Bernoulli-Folgen sagt dann z.B. aus, dass bei einer WK von 0.5 für Erfolg die Gesamtzahl der Erfolge bei großer Beobachtungszahl n mit großer WK sehr nah an $\frac{n}{2}$ sein wird. Beobachtet man nun 200 Münzwürfe und fällt dabei 92 mal „Kopf“, so ist dieses bei einer WK von 0.5 für „Kopf“ im Rahmen des Bereiches, der im Bernoulli-Modell mit großer WK zu erwarten ist. Diese Aussage gilt jedoch auch für „Kopf“-WKen von $\frac{90}{200}$ oder erst recht $\frac{92}{200}$. Davies folgert, dass nach diesem Kriterium das 0.5-Bernoulli-Modell ebenso wie das $\frac{90}{200}$ - oder das $\frac{92}{200}$ -Modell die Daten „adäquat“ approximiert. Auch andere Modelle, die z.B. auf komplizierten Abhängigkeits-Strukturen beruhen, könnten die konkreten Daten adäquat approximieren.

Davies verabschiedet sich damit von WK als Eigenschaft der wirklichen Wirklichkeit. Für ihn gibt es nicht ein wahres Modell, das durch Beobachtungen zu finden wäre, sondern es gibt eine Menge mit den Daten vereinbarere Modelle, nämlich alle, die sich nicht mit dem Argument ausschließen lassen, dass sie mit zu kleiner WK zu den konkreten Daten führen¹³. Valide Schlussfolgerungen über das Experiment, das zu den Daten führte, müssten dann für *alle* adäquaten Modelle gelten. Damit kann Davies illustrieren, wie unsicher viele statistische Schlussfolgerungen sind, denn diese beruhen fast immer nur auf *einem* Modell, und man kann meistens weitere adäquate Modelle konstruieren, die zu ganz anderen Schlussfolgerungen führen würden.

Davies behandelt die mathematischen WK-Axiome als Möglichkeiten, durch die das wissenschaftliche Denken sich mit einer Wirklichkeit auseinandersetzen kann, über die wir direkt nichts wissen können, sondern nur durch beobachtete Daten. Damit ist er sehr nah am konstruktivistischen Ansatz. Weiter gibt Davies für die Konstruktion von „Adäquatheits-Regionen“ zwar einige Prinzipien an, überlässt aber den konkreten DatenanalytikerInnen, problembezogen selber die Kriterien zu wählen, nach denen Modelle Daten ähneln müssen, um als adäquat zu gelten. Die subjektive Sichtweise des Menschen bekommt also in Davies Konzept einen Ort zugewiesen.

So sinnvoll und fruchtbar Davies' Konzept für den wissenschaftlichen Umgang mit WKen sein mag, es macht die klassischen Ansätze doch nicht überflüssig. Denn wenn Davies von den Kolmogorowschen Axiomen als mathematische Konstrukte ausgeht, steckt in seinen WKen doch die ganze stochastische Geschichte, die erst zu den Axiomen geführt hat. Kolmogorow (1933) beruft sich ausdrücklich auf von Mises, und die subjektivistische Idee, die ebenfalls älter ist als Kolmogorows Arbeit, kann die Axiome auch motivieren. Ohne eine subjektivistische oder (wenn man Davies' Beispielen folgt, eher) frequentistische Idee von WK wird man Davies' Forderung, dass WK-Modelle Daten ähneln sollen, nichts abgewinnen können.

¹³Im Beispiel träfe das z.B. für 0.01 für Kopf zu.

4 Fazit

Aus der Sicht der auf Objektivität abzielenden Wissenschaft mögen die WK-Interpretationen von Frequentismus und Subjektivismus unzulänglich erscheinen. Der Versuch, diese Unzulänglichkeiten zu beseitigen, führt zu komplizierteren Modellen. Sowohl bei Walley als auch bei Davies kann die Wahrscheinlichkeit für „Regen morgen“ nicht mehr durch eine einzige Zahl angegeben werden. Bei Walley ist es ein Intervall zwischen oberer und unterer Schranke, bei Davies sind es alle Werte, die aus verschiedenen adäquaten Modellen für bisherige Beobachtungen abgeleitet werden können. Die ernsthafte Suche nach objektivierbaren Begriffen führt von der Eindeutigkeit, die man ja auch als Kriterium für Objektivität auffassen kann, weg.

Mein Fazit ist, dass man ohne eine der von klassischen Ideen im Kopf das Konzept „Wahrscheinlichkeit“ nicht verstehen und schon gar nicht vermitteln kann. Diese Ideen sind freie menschliche Konstruktionen, die zum Leidwesen der meisten ihrer VertreterInnen nicht überzeugend auf wirkliche, unanfechtbare Beobachtungen zurückgeführt werden können¹⁴. Ohne grobe Willkür kommt die mathematische Modellierung der Realität nicht aus, und man muss sich ernsthaft überlegen, ob man sie dann überhaupt will. Denn man bezahlt dafür u.a. den Preis, dass komplexe Fähigkeiten und Einschätzungen von Menschen auf eine Dimension reduziert werden. (Das scheint mir nicht nur für WKen zu gelten.)

Die Konstruktionen der WK und ihre Konsequenzen sind ein konstruktivistischen Lehrstück, denn trotz der fehlenden festen Anbindung an die Beobachtungs-Realität haben die stochastischen Modelle jede Menge stabile Wirklichkeiten geschaffen:

- Amerikanische WissenschaftlerInnen (wer sonst?) folgern mit statistischen Tests aus Unterschieden in den Ergebnissen von IQ-Tests, dass weiße Kinder intelligenter sind als schwarze. Mindestens eine halbe Nation glaubt das und findet ein Schulsystem, das den Schwarzen schlechtere Chancen bietet, selbstverständlich¹⁵.
- Die Verwendung von Würfeln und anderen Glücksspiel-Utensilien zur Entscheidungsfindung (Gottesentscheid) ist historisch mindestens so alt wie das Geldspiel. Wenn jedoch jemand heute eine besondere Folge von Zufallsereignissen als Schicksals-Zeichen interpretiert, wird ihm von wissenschafts-gläubiger Seite oft eine verzerrte Wahrnehmung attestiert. In extremen Fällen kann das bis in die Psychiatrie führen. Dabei hat die Wissenschaft keinerlei nach ihren eigenen Maßstäben überzeugende Argumente gegen mystische Auffassungen vom Zufall zu bieten. Wer in dieser Hinsicht (pseudo-)wissenschaftlich denkt, behindert bloß seine eigene „Zeichen-Konstruktion“.
- Die Verwendung von WK-Angaben im Alltag („Regen-WK“ im Radio, Medizin-Beispiel zu Beginn) ist eine Produktion der mathematischen WK-Theorie. Die daran beteiligten

¹⁴Die Passagen, die ich in den behandelten Werken mit größter Freude gelesen habe, sind die scharfsinnigen Erwiderungen von de Finetti und Davies an fehlgeleitete ObjektivistInnen aller Lager.

¹⁵Gegen diese Untersuchungen lassen sich noch ganz andere Einwände machen als die Unsicherheit statistischer Schlussfolgerung. Das IQ-Konzept an sich konstruiert eine fragwürdige Realität, die es sonst nicht gäbe.

Menschen vertrauen darauf, sich zu verstehen, und machen sich selten „kleinkrämerische“ Gedanken darüber, was ihre Sätze im wissenschaftlichen Sinn bedeuten. Ob sie überrascht wären, dass ihnen die Wissenschaft keine klare Antwort geben könnte?

- Die Verwendung des WK-Begriffes ist selbstbestätigend. Der angebliche „Erfolg“ seiner Anwendung wird als Argument für seine Sinnhaftigkeit angesehen. Dabei ist natürlich gar nicht beobachtbar, ob die Welt mit einem anderen¹⁶ oder ohne WK-Konzept besser, schlechter, oder einfach nur anders aussähe. Tauchen bei stochastischen Modellierungen Fehlprognosen auf (wie z.B. bei der Fortschreibung des Energieverbrauchs, mit der in den siebziger Jahren die Atomkraft propagiert wurde), so wird das nicht gegen das Gesamtkonzept, sondern gegen einzelne Detail-Annahmen oder gar gegen die Beobachtungen selbst verwendet („Messfehler“).

Literatur

Bayes, T. (1908): *Versuch zur Lösung eines Problems der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, kommentierte dt. Übersetzung, Engelmann, Leipzig.

Bernoulli, J. (1899): *Wahrscheinlichkeitsrechnung (Ars conjectandi)*, 4. Teil, dt. Übersetzung, Engelmann, Leipzig.

Bochumer Arbeitsgruppe für Sozialen Konstruktivismus und Wirklichkeitsprüfung (1992): *Wirklichkeitsprüfung: Eine sozial-konstruktivistische Forschungsperspektive für die Psychologie*, Arbeitspapier Nr. 10, Fakultät für Psychologie, Ruhr-Universität Bochum. (erhältlich unter www.boag.de).

Davies, P. L. (1995): Data Features, *Statistica Neerlandica* 49, S. 185-245.

de Finetti, B. (1993): Statistics and probability in R. von Mises' conception in *Probabilità e Induzione*, CLUEB, Bologna.

de Finetti, B. (1981): *Wahrscheinlichkeitstheorie*, dt. Übersetzung, Oldenbourg, Wien.

Fine, T. L. (1973): *Theories of Probability*, Academic Press, New York.

Kolmogorow, A. (1933): *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Springer, Berlin.

von Foerster, H. (1993): Über das Konstruieren von Wirklichkeiten, dt. Übersetzung in *Wissen und Gewissen*, hg. von S. J. Schmidt, Suhrkamp, Frankfurt, S. 25-49.

von Mises, R. (1951): *Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit*, 3. Auflage, Springer, Wien.

Walley, P. (1991): *Statistical Reasoning with Imprecise Probabilities*, Chapman & Hall, London.

Autor: Christian Hennig, Universität Hamburg,
Fachbereich Mathematik - SPST/ZMS, Bundesstr. 55, 20146 Hamburg,
hennig@math.uni-hamburg.de

¹⁶Aktuell hat sie ja auch schon mehr als eines.