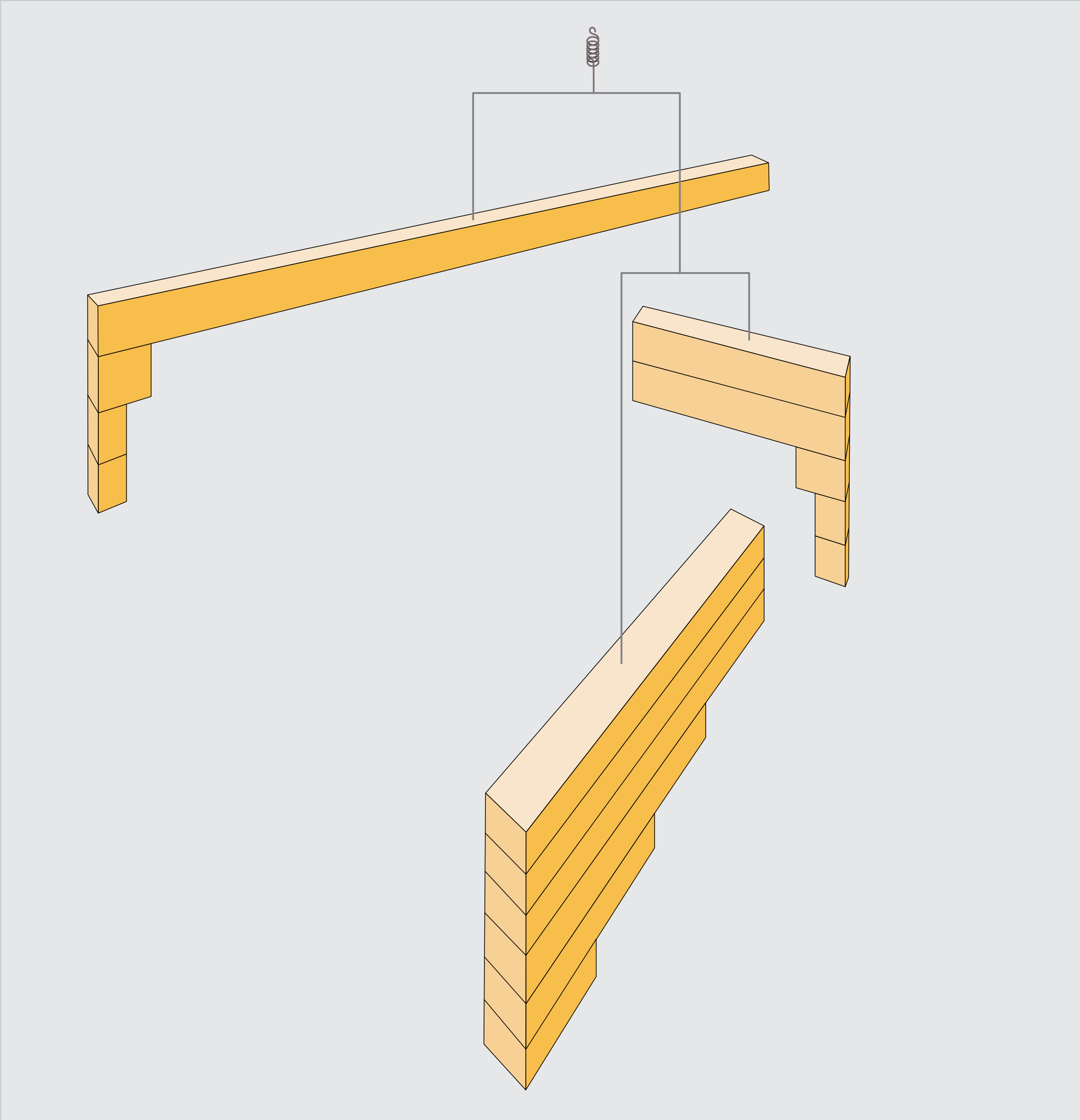
Swiss Re



# Die Bestimmung von optimalen Rückversicherungs-Selbstbehalten

Die Bestimmung von optimalen
Rückversicherungs-Selbstbehalten

# Inhalt

# Vorwort

Rückversicherung hat vor allem den Zweck, die zufälligen Schwankungen im Resultat des Erstversicherers auf einem erträglichen Niveau zu halten. Wie man das effizient erreichen kann, zeigt Hans Schmitter in der vorliegenden Publikation. Sie wendet sich gleichermassen an Erstversicherer wie auch an Rückversicherer und Rückversicherungsmakler, die ihre Kunden in der Zusammenstellung von Rückversicherungsprogrammen beraten.

Das in der Broschüre beschriebene Konzept ist in jeder Versicherungsbranche anwendbar und nicht etwa auf die HUK- oder Sachbranchen beschränkt. Es basiert auf Arbeiten von Bruno de Finetti über die Festsetzung optimaler proportionaler Selbstbehalte, die er in einem Artikel mit dem Titel «Il problema dei pieni» [1] schon 1940 publiziert hat. Dieser Artikel enthält auch die Grundlagen zur Festsetzung von nichtproportionalen Selbstbehalten, wie sie in dieser Publikation gezeigt werden. De Finettis Arbeit ist ausserhalb der Hochschulen kaum zur Kenntnis genommen worden und deshalb sind die praktisch anwendbaren Regeln, die sich aus seinen Überlegungen ergeben, in der Versicherungswirtschaft selbst unter Mathematikern noch immer weitgehend unbekannt. Auch Leserinnen und Leser mit Kenntnissen in Risikotheorie werden daher in der vorliegenden Publikation Neues finden.

Zum Verständnis des Textes sind keine mathematischen Kenntnisse nötig, die über das Lesen einer einfachen algebraischen Formel hinausgehen.

Der Broschüre liegt eine Compact Disk mit einem von Pamela Hall entwickelten Excelfile bei, das Instrumente zur konkreten Selbstbehaltsbestimmung enthält. Sie reichen von einfachen Hilfsmitteln zum Durchrechnen numerischer Beispiele über die Bestimmung realistischer Verteilungsparameter bis zur Konstruktion ganzer Rückversicherungsprogramme über mehrere Sparten. Die dabei angewandten Rechenverfahren sind in Visual Basic programmiert.

Thomas Hiltmann
Head Group Product Management Casualty

# 1 Einleitung

Wie lassen sich mit Hilfe der Rückversicherung die zufälligen Schwankungen im Resultat des Erstversicherers effizient auf einem erträglichen Niveau halten? Diese Frage ist der Gegenstand der vorliegenden Publikation. Effizient heisst in diesem Zusammenhang, für den Preis, den man auszugeben bereit ist, die Schwankung so weit wie möglich zu reduzieren, und zwar nicht durch Feilschen, sondern durch geschickte Wahl der Selbstbehalte.

Was unter Selbstbehalt zu verstehen ist, hängt vom Vertragstyp ab: Ein Quotenselbstbehalt ist der Anteil eines Geschäfts, der nicht rückversichert wird. Dieser wird meistens in Prozent ausgedrückt. Ein Summenexzedenten-Selbstbehalt ist ein Teil einer Versicherungssumme oder eines MPLs (Maximum Possible Loss), wird Maximum genannnt und als Betrag in Währungseinheiten angegeben. Ein Schadenexzedenten-Selbstbehalt schliesslich ist der maximale Betrag, den der Erstversicherer an einen Schaden bezahlt und heisst Priorität – was darüber hinausgeht, bezahlt der Rückversicherer. Auch die gesamte Schadenlast, die der Erstversicherer selber trägt, wird gelegentlich als Selbstbehalt bezeichnet. Die Gesamtheit der Selbstbehalte aller Rückversicherungsverträge eines Erstversicherers nennt man üblicherweise Rückversicherungsprogramm.

In der Sach-Rückversicherung gibt es gewisse Faustregeln zur Gestaltung guter Rückversicherungsprogramme (siehe [4]), aber in den HUK-Branchen (Haftpflicht, Unfall, Kraftfahrzeug) sind solche Regeln unbekannt. Dabei wären sie für Praktiker sehr willkommen, denn jeder Erstversicherer, der sein Rückversicherungsprogramm festlegt, stellt sich etwa folgende Fragen: Welche Motorfahrzeug-Haftpflichtquote passt zu einem bestimmten Feuer-Summenexzedenten? Welche Kaskoquote passt zu einer Motorfahrzeug-Haftpflichtquote von beispielsweise 30%? Soll man einen Quotenselbstbehalt noch durch einen Schadenexzedenten schützen? Wie sieht ein optimal strukturiertes Rückversicherungsprogramm aus? Welche Angaben sind für die Beantwortung solcher Fragen überhaupt nötig? Ähnliche Fragen stellen sich auch Versicherungskonzernen, die eine interne Rückversicherung benützen, um die Ergebnisse ihrer einzelnen Profit Centers zu glätten.

Auf den folgenden Seiten gehen wir auf diese Fragen ein und zeigen Antworten auf, die theoretisch gut begründet und praktisch anwendbar sind.

# 2 Wie lässt sich die Schwankungsanfälligkeit messen?

Jeder Risikenbestand erleidet in unregelmässigen Abständen grössere und kleinere Schäden. Die Summe aller Schäden eines Jahres bezeichnet man als Jahresschadenlast oder kurz als Schadenlast. Die künftige Jahresschadenlast schätzt man aufgrund der prognostizierten Schadenhäufigkeit und des prognostizierten durchschnittlichen Einzelschadens, aber was dann tatsächlich eintritt, weicht normalerweise auch von exakten Prognosen ganz erheblich ab, und zwar rein zufällig. Man nennt einen Bestand an Risiken schwankungsanfällig, wenn mit grossen zufälligen Abweichungen der tatsächlichen von der prognostizierten Schadenlast zu rechnen ist. Im Folgenden wird gezeigt, wie man diese etwas vage Bezeichnung der Schwankungsanfälligkeit präzis fassen kann.

Sind von einem Bestand, beispielsweise von Motorfahrzeughaftpflicht-Risiken, im Mittel 10 000 Schäden zu erwarten, überrascht es niemanden, wenn 100 mehr oder 100 weniger eintreten. Schwankungen dieser Grössenordnung sind bei einer erwarteten Schadenanzahl von 10 000 normal. Betrachten wir hingegen einen viel kleineren Bestand, von dem nur 20 Schäden zu erwarten sind, so ist eine Abweichung nach oben von 100 etwas Aussergewöhnliches. Nach unten ist eine solche Abweichung sogar unmöglich. Das Beispiel zeigt: Unterschiede zwischen der tatsächlichen und der erwarteten Anzahl Schäden sind umso wahrscheinlicher, je grösser die erwartete Anzahl ist (1 000 bzw. 20). In grossen Beständen kommen grössere Abweichungen häufiger vor als in kleinen. Die erwartete Anzahl Schäden gibt daher bereits einen ersten Hinweis darauf, ob mit grossen oder kleinen Schwankungen zu rechnen ist.

Stellen wir uns nun zwei Bestände vor, von denen je 10 000 Schäden zu erwarten sind. Im Weiteren betrage jeder Schaden des ersten Bestandes 100 Euro und jeder Schaden des zweiten Bestandes 10 000 Euro. Ein Schaden mehr oder weniger verändert also im ersten Fall die Schadenlast nur um 100 Euro, im zweiten jedoch um 10 000. In dieser Situation ist der zweite Bestand schwankungsanfälliger als der erste. Falls alle Schäden gleich viel kosten, schwankt die Schadenlast aus hohen Schadenbeträgen stärker als aus tiefen.

Schliesslich betrachten wir noch zwei Bestände, von denen wieder gleich viele Schäden zu erwarten sind. Im ersten betrage jeder Schaden 1 000 Euro; im zweiten kommen unterschiedliche Schadenhöhen vor, im Mittel sollen sie aber auch 1 000 Euro betragen. Gefühlsmässig erscheint der zweite Bestand als schwankungsanfälliger. Um zu zeigen, dass dieses Gefühl berechtigt ist, ist es nötig, etwas weiter auszuholen.

Abbildung 1 zeigt eine grafische Darstellung aller möglichen Schäden. Jeder Schaden ist durch einen Balken dargestellt, und zwar sind sie der Grösse nach geordnet und aufeinandergeschichtet, wobei der kleinste zuunterst und der grösste zuoberst zu liegen kommt. Eine derartige Darstellung nennt man Schadenverteilung. Es ist für viele Überlegungen vorteilhaft, wenn man auf der senkrechten Achse eine Skala von 0 bis 100% aller Schäden verwendet, anstatt die Anzahl vom kleinsten bis zum grössten Schaden aufzuführen. Die mit E bezeichnete Schadenhöhe stellt den erwarteten oder mittleren Schaden dar. Das ganze Gebilde aus

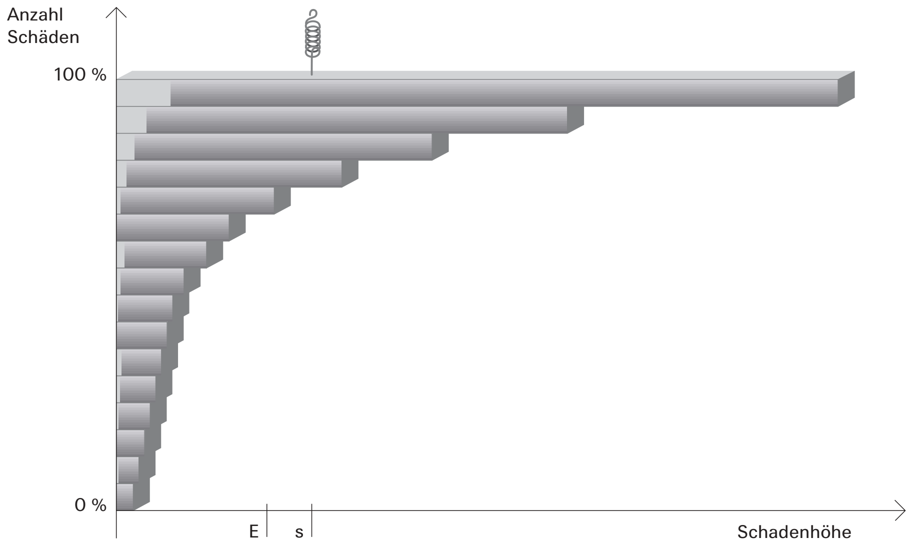


Abbildung 1

Balken ist im Abstand s von der linken Begrenzung aufgehängt und soll sich im Gleichgewicht befinden. s ist umso grösser, je mehr sich die einzelnen Schäden voneinander unterscheiden. Wenn alle Schäden gleich hoch sind, wie in Abbildung 2, wird s gerade halb so gross wie E oder 2·s gleich hoch wie E. Kleiner als in diesem Fall kann s im Verhältnis zu E nicht werden. Den Betrag 2·s, also das Doppelte der Schadenhöhe s, bei der die Schadenverteilung im Gleichgewicht hängen würde, benützt man neben der erwarteten Anzahl Schäden und neben dem mittleren Einzelschaden zur Messung der Schwankungsanfälligkeit. Dabei werden die drei Grössen miteinander multipliziert, und das Produkt wird als Varianz der Schadenlast bezeichnet:

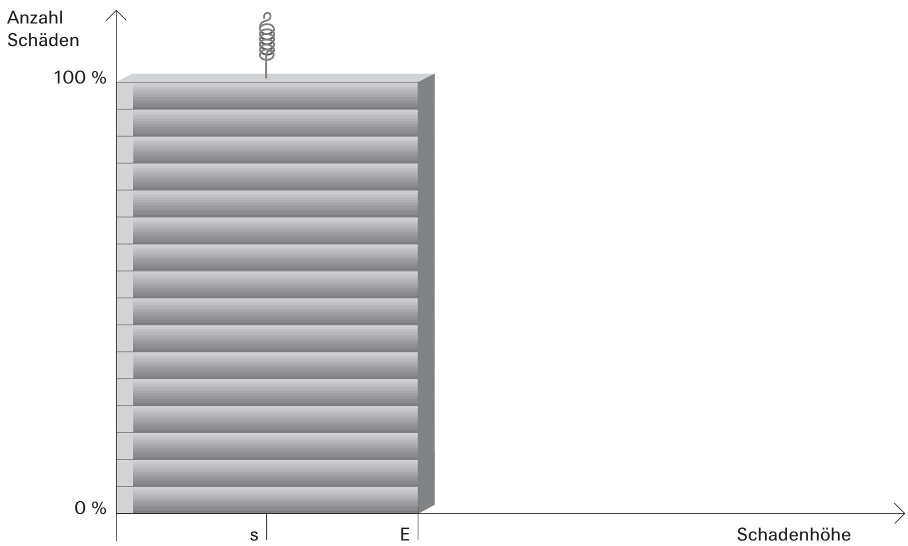


Abbildung 2

Varianz der Schadenlast = erwartete Anzahl Schäden·erwarteter Einzelschaden·2·s

In der Nichtlebenmathematik ist für solche Gleichungen eine kurze und übersichtliche Schreibweise verbreitet. Dabei bezeichnet

| | |
|---|---|
| Z | die Schadenlast, |
| V[Z] | die Varianz der Schadenlast, |
| λ | die erwartete Anzahl Schäden und |
| E | den erwarteten Einzelschaden. |

Dann heisst die Gleichung

$$(2.1)\ V[Z] = \lambda \cdot E \cdot 2 \cdot s$$

Wie es der Intuition entspricht, ist die Varianz dann gross, wenn die erwartete Anzahl Schäden gross ist, wenn der erwartete Einzelschaden gross ist und wenn sich die Einzelschäden stark voneinander unterscheiden. Eine weitere wichtige Eigenschaft der Varianz ist die folgende:

Legt man zwei kleinere Bestände zu einem grösseren zusammen, so ist die Varianz des grösseren Bestandes gleich der Summe der beiden Varianzen der kleineren Bestände, wie das folgende Zahlenbeispiel illustriert: Wir betrachten die zwei Bestände A und B. In A ereignen sich im Mittel 6 Schäden pro Jahr, alle von der gleichen Höhe 2. In B kommt es im Mittel zu einem Schaden pro Jahr mit der festen Höhe 16. Die erwartete Anzahl Schäden und der mittlere Schaden des zusammengesetzten Bestandes sind einfach zu bestimmen. Für die Schadenhöhe s, bei der die zusammengesetzte Verteilung im Gleichgewicht wäre, wenn man sie aufhängen könnte, brauchen wir Abbildung 3. Sie zeigt ein Mobile, an dem zwei Gewichte hängen. Das obere stellt einen Schaden von 16 dar, das untere 6 Schäden von 2. Wenn das Gewicht von 16 an einem Arm der Länge 3 zieht und das Gewicht von 12 an einem Arm der Länge 4, dann ist das Mobile im Gleichgewicht. Man bekommt daher s entweder als Summe von 1 und 4 oder als Differenz von 8 und 3, wie man der Abbildung 3 entnehmen kann. Tabelle 1 zeigt, dass dann die Varianz des zusammengesetzten Bestandes tatsächlich die Summe der beiden Teilvarianzen ist (24+256=280).

| | A | B | zusammen |
|---|---|---|---|
| erwartete Anzahl Schäden | 6 | 1 | 6+1=7 |
| erwartete Schadenlast | 12 | 16 | 12+16=28 |
| erwarteter Einzelschaden | 2 | 16 | 28/7=4 |
| s | 1 | 8 | 5 (Abbildung 3) |
| Varianz der Schadenlast | 6·2·2·1=24 | 1·16·2·8=256 | 7·4·2·5=280 |

Tabelle 1

Für Leserinnen und Leser mit Kenntnissen in der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist anzumerken, dass in der obenstehenden Definition der Varianz stillschweigend die harmlose Annahme getroffen wird, die Anzahl Schäden sei poissonverteilt.

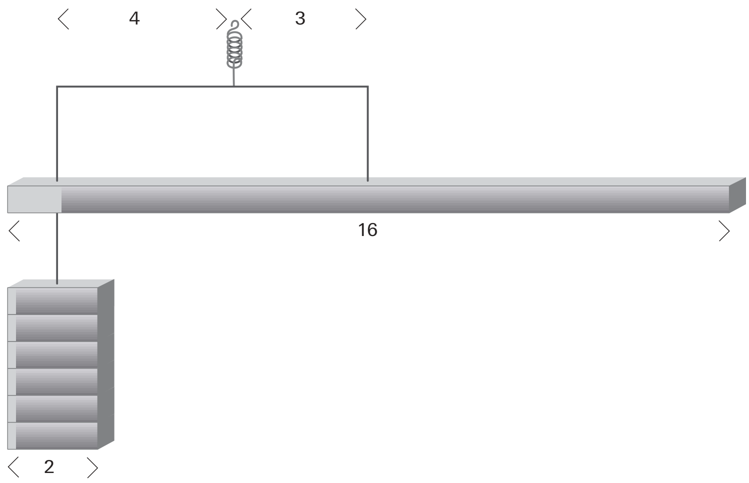



Abbildung 3

In Abbildung 4 sind E und 2·s noch einmal grafisch dargestellt, diesmal in der Form eines Rechtecks mit der Länge 2·s, der Breite E und folglich der Fläche E·2·s. Dieses Rechteck ist zusammengesetzt aus einem Quadrat mit der Seitenlänge E und einem kleineren Rechteck mit den Seiten E und 2·s-E. Multipliziert man die beiden Seiten des kleineren Rechtecks miteinander, so erhält man die Rechtecksfläche E·(2·s-E). Sie heisst Varianz des Einzelschadens (im Gegensatz zur Varianz der Jahresschadenlast). Bezeichnet man sie mit V, so ist

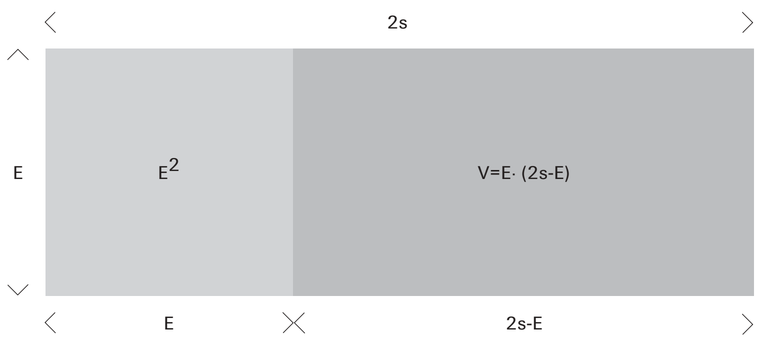



Abbildung 4

(2.2) $E \cdot 2 \cdot s = E^2 + V$

Die Varianz der Schadenlast lässt sich daher auch anders als in der Beziehung (2.1) berechnen: Wird $E \cdot 2 \cdot s$ durch $E^2+V$ ersetzt, so erhält man

(2.3) $V[Z] = \lambda \cdot (E^2+V)$

Die Darstellung (2.3) der Varianz V[Z] ist gebräuchlicher als die Beziehung (2.1), in der die Schadenhöhe s vorkommt. Die Schadenhöhe s, bei der eine Verteilung im Gleichgewicht hängen würde, wird in der Wahrscheinlichkeitsrechnung kaum gebraucht. Sie hat daher auch keinen speziellen Namen.

Mit Hilfe der Varianz ist die Wahrscheinlichkeit abschätzbar, dass die Schadenlast um einen grossen Betrag von ihrem erwarteten Wert abweicht. Dazu lässt sich die Tschebyscheffsche Ungleichung benützen, die in jedem Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung hergeleitet wird. Sie heisst:

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Abweichung einen bestimmten Betrag überschreitet, ist nicht grösser als das Verhältnis der Varianz zum Quadrat dieses Betrags.

Das folgende Zahlenbeispiel illustriert diese Zusammenhänge. Es entspricht in der Grössenordnung den Verhältnissen in der schweizerischen Motorfahrzeughaftpflicht, wobei wir annehmen, die Währungseinheit sei der Euro.

| | |
|---|---|
| erwartete Anzahl Schäden: | 1 000 |
| mittlerer Einzelschaden: | 4 000 |
| Varianz des Einzelschadens: | $1.02 \cdot 10^9$ |
| erwartete Schadenlast: | $4 \cdot 10^6$ |
| Varianz der Schadenlast | $1\,000 \cdot (4\,000 \cdot 4\,000 + 1.02 \cdot 10^9) = 1.036 \cdot 10^{12}$ |
| Kapital: | 5 000 000 |

Gemäss der Tschebyscheffschen Ungleichung ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Schadenlast ihren Mittelwert von 4 000 000 um mehr als den Betrag von 5 000 000 übertrifft, höchstens $1.036 \cdot 10^{12} / 5\,000\,000^2 = 4.1\%$.

Bemerkenswert an dieser Abschätzung ist, dass man über die Schadenverteilung fast nichts zu wissen braucht. Die Kenntnis des mittleren Schadens und der Varianz genügt.

# 4 Die Reduktion der Varianz durch Rückversicherung

Die Rückversicherung hat in erster Linie den Zweck, die Schwankungen der Schadenlast zu reduzieren. Das Mass für diese Schwankungen ist die Varianz. In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie die Rückversicherung die Varianz des Erstversicherers reduziert.

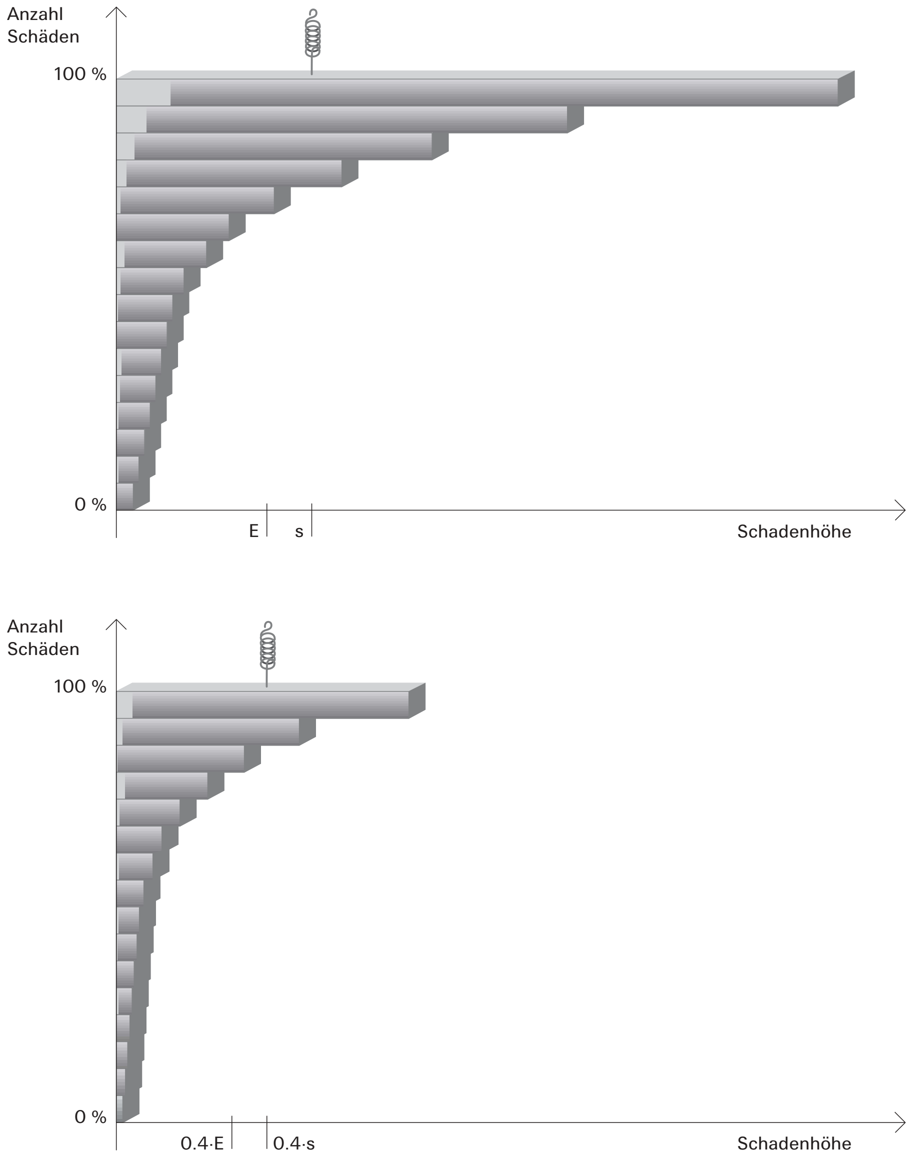



Abbildung 5

Eine Quote mit einem Selbstbehalt von beispielsweise 40% teilt jeden Schaden zwischen Erst- und Rückversicherer im Verhältnis 40:60 auf. Abbildung 5 zeigt noch einmal die gleiche Schadenverteilung wie Abbildung 1, das heisst alle möglichen Schäden der Grösse nach aufeinandergeschichtet. Darunter findet man die zusammengestauchte Verteilung der Schäden im Quotenselbstbehalt. Jeder Schaden ist auf 40% seines ursprünglichen Betrags reduziert. Ebenso beträgt der mittlere Schaden im Selbstbehalt 40% des ursprünglichen mittleren Schadens E und auch die Schadenhöhe, bei der man die Verteilung aufhängen könnte, so dass sie im Gleichgewicht bleibt, beträgt 40% von s. Die Anzahl Schäden wird durch die Quote nicht verändert. Nach Abschnitt 2 wird somit die Varianz der Schadenlast im Selbstbehalt folgendermassen berechnet:

Varianz der Schadenlast im Selbstbehalt = erwartete Anzahl Schäden
· erwarteter Einzelschaden·40%
·2·s·40%

Anstelle von 40% kann natürlich in der obigen Beziehung irgend ein beliebiger Quotenselbstbehalt q stehen. Wenn wir für die Schadenlast im Selbstbehalt die Abkürzung $Z_r$ einführen (r vom englischen «retained»), so können wir die Varianz der Schadenlast im Selbstbehalt ausdrücken als

(4.1) $V[Z_r] = \lambda \cdot E \cdot q \cdot 2 \cdot s \cdot q.$

Ersetzen wir auf Grund von (2.2) in der obigen Gleichung $E \cdot 2 \cdot s$ durch $E^2+V$, dann erhalten wir

(4.2) $V[Z_r] = \lambda \cdot (E^2+V) \cdot q^2$

Auch ein Schadenexzedent mit einer Priorität d reduziert die Varianz des Erstversicherers. Abbildung 6 zeigt, wie jeder Schaden auf der Höhe d gestutzt wird. Dadurch wird der mittlere Schaden für den Erstversicherer von E auf $E_r$ reduziert, ebenso die Schadenhöhe, wir bezeichnen sie mit $s_r$, bei der die Verteilung der gestutzten Schäden im Gleichgewicht hängen würde. Um wie viel $s_r$ kleiner ist als s und um wie viel $E_r$, der mittlere Schaden im Selbstbehalt, kleiner ist als E, hängt nicht nur von der Höhe der Priorität d ab, sondern auch von der Form der Schadenverteilung. Für die Varianz im Selbstbehalt gilt:

Varianz der Schadenlast im Selbstbehalt = erwartete Anzahl Schäden
· erwarteter Einzelschaden
im Selbstbehalt
$\cdot 2 \cdot s_r$

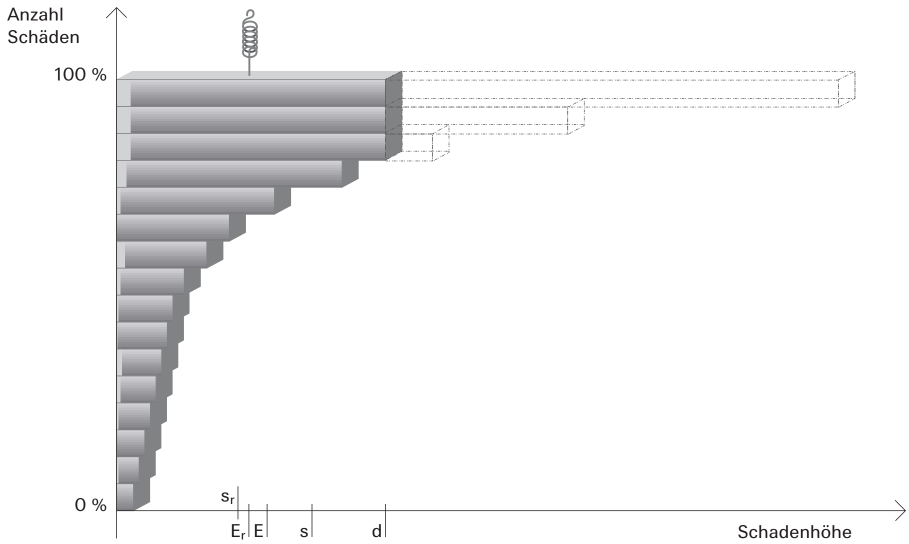



Abbildung 6

oder als Gleichung:

$$(4.3)\ V[Z_r] = \lambda \cdot E_r \cdot 2 \cdot s_r$$

Man kann in Analogie zu (2.2) den Ausdruck $E_r \cdot 2 \cdot s_r$ durch $E_r^2 + V_r$ ersetzen. Dann wird (4.3) zu

$$(4.4)\ V[Z_r] = \lambda \cdot (E_r^2 + V_r).$$

Wenn der Erstversicherer seinen Bestand gleichzeitig mit einem Schadenexzedenten und einer Quote schützt, erhält man die reduzierte Varianz, indem man in (4.2) den Ausdruck $E^2+V$ durch $E_r^2+V_r$ ersetzt. Dies führt auf

$$(4.5)\ V[Z_r] = \lambda \cdot (E_r^2 + V_r) \cdot q^2$$

# 5 Optimale Selbstbehalte

Jeder Rückversicherungsvertrag deckt einen Teil des Geschäfts des Erstversicherers und reduziert dadurch die Varianz dieses Teils. Die reduzierten Varianzen, die dem Erstversicherer noch bleiben, summieren sich auf zu seiner gesamten verbleibenden Varianz. Je kleiner die Selbstbehalte der einzelnen Verträge sind, desto kleiner wird die verbleibende Varianz und umso ausgeglichener verläuft das Geschäft des Erstversicherers. Allzu klein dürfen die Selbstbehalte aber auch wieder nicht sein, da sonst die Rückversicherungspreise sehr hoch werden. Wenn es gelingt, zu einem vorgegebenen gesamten Rückversicherungspreis die Selbstbehalte so festzulegen, dass die verbleibende Varianz nicht noch weiter verkleinert werden kann, dann sind sie optimal. Um Selbstbehalte zu einem vorgegebenen Rückversicherungspreis optimieren zu können, muss man sich zuerst im Klaren darüber sein, was genau unter Rückversicherungspreis überhaupt zu verstehen ist.

Jede Rückversicherungsprämie ist die Summe aus der erwarteten Schadenlast des Rückversicherungsvertrags und einem Betrag, der seinerseits wieder aus Kosten- und Schwankungszuschlag des Rückversicherers zusammengesetzt ist. Die erwartete Schadenlast wird auch als Risikoprämie bezeichnet. Langfristig bekommt sie der Erstversicherer in der Form von Schadenzahlungen des Rückversicherers zurück. Daher ist sie im Grunde genommen gar kein echter Bestandteil des Preises, sondern hat eher den Charakter eines Flaschenpfands, das der Erstversicherer einlöst, wenn er dem Rückversicherer seine Schäden präsentiert. Dagegen bleiben Kosten- und Schwankungszuschlag langfristig beim Rückversicherer. Sie allein sind der eigentliche Preis für den Rückversicherungsschutz. Dabei spielt es keine Rolle, wie gross diese beiden Zuschläge einzeln sind. Wichtig ist nur ihre Summe. Im Folgenden verstehen wir unter Rückversicherungspreis also nicht die ganze Rückversicherungsprämie, sondern nur die Differenz zwischen Prämie und Risikoprämie.

Nun betrachten wir zwei Rückversicherungsverträge A und B, jeder mit seinem Selbstbehalt (Quotenselbstbehalt oder Priorität), seinem Rückversicherungspreis (Schwankungs-und Kostenzuschlag) und seiner Varianz der Schadenlast im Selbstbehalt. Die beiden Varianzen nennen wir Varianz A und Varianz B. Die gesamte Varianz, die dem Erstversicherer aus den beiden Verträgen bleibt, ist die Summe der einzelnen Varianzen A und B. Wir stellen uns die Frage, ob wir die gesamte Varianz aus den beiden Verträgen durch eine geschickte Wahl der beiden Selbstbehalte noch verkleinern können, ohne dass sich am gesamten Preis etwas verändert.

Wird der Selbstbehalt des Vertrags A ein wenig erhöht, so dass sein Rückversicherungspreis abnimmt, und gleichzeitig der Selbstbehalt des Vertrags B ein wenig gesenkt, so dass sein Rückversicherungspreis um gleich viel zunimmt, so verändert sich der gesamte Preis, den A und B zusammen kosten, nicht. Infolge der Erhöhung des Selbstbehalts von A nimmt die Varianz A ein wenig zu, wegen der Reduktion des Selbstbehalts von B nimmt die Varianz B ein wenig ab. Die gesamte Varianz, also die Summe aus Varianz A und Varianz B, kann bei diesem Vorgang zunehmen, abnehmen oder gleichbleiben. Der Erstversicherer ist natürlich an einer Abnahme der gesamten Varianz interessiert. Die tritt dann ein, wenn die Abnahme der Varianz B grösser ist als die Zunahme der Varianz A. In diesem Fall ist es vorteilhaft, den Selbstbehalt von A weiter zu erhöhen und von B weiter zu senken, wobei der totale Preis immer gleich bleibt, aber die totale Varianz abnimmt. Andernfalls muss man gerade umgekehrt vorgehen, also den Selbstbehalt von A senken und von B erhöhen. Man kann dieses Spiel so lange treiben, bis eine der drei folgenden Situationen eintritt:

1. Vertrag A gibt nichts mehr in die Rückversicherung ab, der Erstversicherer behält alles.
2. Vertrag B kann nicht noch mehr in die Rückversicherung abgeben, der Erstversicherer behält nichts mehr.
3. Die Zunahme der Varianz A als Folge der Selbstbehaltserhöhung von A und die Abnahme der Varianz B als Folge der Selbstbehaltsreduktion von B sind gleich gross.

In allen drei Fällen hat man eine Rückversicherungslösung gefunden, die zu einem vorgegebenen gesamten Rückversicherungspreis auf die kleinstmögliche gesamte Varianz führt.

Wenn man nicht nur die Selbstbehalte von zwei Rückversicherungsverträgen A und B festlegen will, sondern von einer grösseren Anzahl, kann man genau die gleichen Überlegungen anstellen. Zu einem gegebenen gesamten Rückversicherungspreis ist die gesamte Varianz dann minimal, wenn bei jedem Vertrag eine kleine Erhöhung des Selbstbehalts die gleiche Erhöhung der Varianz zur Folge hat. Auch im Fall mehrerer Rückversicherungsverträge können beide Grenzfälle vorkommen, nämlich dass einige Verträge überhaupt nicht rückversichert werden oder dass sie vollständig rückversichert werden.

Es ist gebräuchlich, die Summe aus Schwankungs- und Kostenzuschlag an der erwarteten Schadenlast des Rückversicherers zu messen. Wir bezeichnen dieses Verhältnis mit b, also:

$$b = \frac{\text{Rückversicherungszuschläge auf einem Quotenvertrag}}{\text{erwartete Schadenlast des Rückversicherers}}$$

Wenn q den Quotenselbstbehalt bedeutet, dann ist die erwartete Schadenlast des Rückversicherers gleich

$$\lambda \cdot E \cdot (1\text{-}q),$$

und somit sein Preis

$$b \cdot \lambda \cdot E \cdot (1\text{-}q).$$

Dieser Preis nimmt ab, wenn q ein wenig erhöht wird.

Nach Beziehung (4.1) beträgt die Varianz der Schadenlast im Selbstbehalt

$$V[Z_r] = \lambda \cdot E \cdot q \cdot 2 \cdot s \cdot q.$$

Sie nimmt zu, wenn man q ein wenig erhöht. In Abschnitt 10.1 ist hergeleitet, dass das Verhältnis zwischen Preisreduktion und Varianzzunahme im Selbstbehalt, wir nennen es w,

$$(6.1)\ w = \frac{b \cdot E}{E \cdot 2 \cdot s \cdot q \cdot 2}$$

bzw.

$$(6.2)\ w = \frac{b \cdot E}{(E^2+V) \cdot 2 \cdot q}$$

beträgt. Nach Abschnitt 5 sind Quotenselbstbehalte dann optimal festgelegt, wenn für jeden Quotenvertrag dieses Verhältnis w gleich hoch ist.

Beziehung (6.2) ist praktisch anwendbar, wie das folgende nummerische Beispiel zeigt.
Angenommen, ein Erstversicherer erachte den Selbstbehalt von 50% auf seinem Motorfahrzeughaftpflicht-Geschäft als angemessen. Soll er von seinem Kaskogeschäft ebenfalls 50% behalten? Oder mehr? Oder weniger? Dies kann er mit Hilfe

von Beziehung (6.2) entscheiden. $E_H$ bezeichnet den mittleren Haftpflichtschaden, $V_H$ die Varianz des Haftpflichtschadens, $b_H$ den Zuschlag für Haftpflicht, $q_H$ den Quotenselbstbehalt für Haftpflicht und $E_K$ den mittleren Kaskoschaden, $V_K$ die Varianz des Kaskoschadens, $b_K$ den Zuschlag für Kasko und $q_K$ den zu bestimmenden Quotenselbstbehalt für Kasko. Weil das Verhältnis w für Haftpflicht und Kasko gleich hoch sein muss, gilt

$$\frac{b_H \cdot E_H}{(E_H^2 + V_H) \cdot 2 \cdot q_H} = \frac{b_K \cdot E_K}{(E_K^2 + V_K) \cdot 2 \cdot q_K}$$

Diese Gleichung, nach $q_K$ aufgelöst, ergibt

$$q_K = q_H \cdot \frac{b_K}{b_H} \cdot \frac{E_K}{E_H} \cdot \frac{E_H^2 + V_H}{E_K^2 + V_K}$$

Mit den Bezeichnungen $s_H$ und $s_K$ für die Schadenhöhen, bei denen die entsprechenden Verteilungen im Gleichgewicht hängen würden, kann man diese letzte Beziehung auch schreiben als (siehe (2.2))

$$q_K = q_H \cdot \frac{b_K}{b_H} \cdot \frac{s_H}{s_K}$$

Daraus wird ersichtlich: Je grösser $b_K$ im Verhältnis zu $b_H$ ist, desto teurer ist die Kaskorückversicherung und desto weniger sollte der Erstversicherer davon kaufen. Handkehrum: Je unausgeglichener das Kaskogeschäft verglichen mit dem Haftpflichtgeschäft verläuft, desto grösser wird $s_K$ im Nenner verglichen mit $s_H$ im Zähler und desto mehr Kaskorückversicherung sollte der Erstversicherer kaufen. Das sind zwei Selbstverständlichkeiten, welche die obenstehende Beziehung nur quantifiziert.

In der Tabelle 2 entsprechen die Zahlen zur Haftpflicht in der Grössenordnung schweizerischen Verhältnissen, wobei als Währungseinheit der Euro benützt wird. Im Weiteren rechnen wir wegen der langen Abwicklungsdauer in der Motorfahrzeughaftpflicht mit diskontierten Schadenhöhen. Das bedeutet, dass die zukünftigen Zahlungen mit einem Zinssatz von beispielsweise 5% während der mittleren Anlagedauer von rund 4.5 Jahren auf ihren Wert im Jahr, in dem sich die Schäden ereignen, zurückgerechnet werden. Die nichtdiskontierten Zahlen wären unter diesen Annahmen rund 25% höher. Vor einer Übernahme der Kaskozahlen sei, im Gegensatz zu den Haftpflichtzahlen, gewarnt: Da sie stark von der Exponierung gegenüber Naturkatastrophen abhängen, sind sie von Erstversicherer zu Erstversicherer unterschiedlich.

| | Haftpflicht | Kasko |
|---|---|---|
| E | 4000 | 1000 |
| V | $10.2\ 10^8$ | $2.2 \cdot 10^8$ |
| b | 0.1 | 0.05 |
| q | 50% | ? |

Tabelle 2

Setzt man im algebraischen Ausdruck für den Quotenselbstbehalt $q_K$ die Werte aus Tabelle 2 ein, erhält man als Lösung

$$q_K = 50\% \cdot \frac{0.05}{0.1} \cdot \frac{1000}{4000} \cdot \frac{4000^2 + 10.2 \cdot 10^8}{1000^2 + 2.2 \cdot 10^8}$$

$$= 29\%.$$

Eine andere Anwendung von (6.1) und (6.2) ist die Festsetzung des Maximums eines Summenexzedenten. Dazu betrachten wir zwei Schadenverteilungen mit den folgenden Eigenschaften:

1. Es gibt einen maximalen Schaden, der nicht übertroffen werden kann (die Versicherungssumme oder den MPL).
2. Jeder Schaden der einen Verteilung ist um den gleichen Faktor x kleiner als der entsprechende Schaden der andern Verteilung. Insbesondere gilt das für den maximalen Schaden, den mittleren Schaden E und den Schaden s, an dem man die Verteilung im Gleichgewicht aufhängen könnte.

In Abbildung 5 sind zwei solche Verteilungen dargestellt. Der Faktor x ist dort 40%. Die Verhältnisse der beiden Schadenverteilungen sind in Tabelle 3 zusammengefasst.

| | Schadenverteilung 1 | Schadenverteilung 2 |
|---|---|---|
| maximaler Schaden | M | M·x |
| mittlerer Schaden | E | E·x |
| Schadenhöhe s | s | s·x |
| proportionaler Selbstbehalt q | $q_1$ | $q_2$ |

Tabelle 3

Jetzt nehmen wir für beide Schadenverteilungen den gleichen Zuschlagsfaktor b an und setzen die Werte aus Tabelle 3 in (6.1) ein:

$$w = \frac{b \cdot E}{E \cdot 2 \cdot s \cdot q_1 \cdot 2}$$

$$= \frac{b \cdot E \cdot x}{E \cdot x \cdot 2 \cdot s \cdot x \cdot q_2 \cdot 2}$$

Lösen wir nach $q_2$ auf, so erhalten wir

$$q_2 = \frac{q_1}{x}$$

Zum Schluss multiplizieren wir den proportionalen Selbstbehalt mit dem maximalen Schaden.
Im Fall der Verteilung 1 erhalten wir $q_1 \cdot M$ und nennen diesen Ausdruck m, im Fall der Verteilung 2 erhalten wir

$$q_2 \cdot M \cdot x = q_1 \cdot M$$
$$= m$$

Der proportionale Selbstbehalt, multipliziert mit der Versicherungssumme oder dem MPL, ergibt für beide Verteilungen gleich viel, eben m. Diesen Ausdruck m nennt man Maximum eines Summenexzedenten. Ein Summenexzedent führt demnach zu optimalen Selbstbehalten, wenn für die gedeckten Risiken wie in Tabelle 3 gilt: Das Verhältnis von den zwei maximal möglichen Schäden, von den entsprechenden mittleren Schäden und von den zwei entsprechenden Schadenhöhen s ist immer gleich gross. Man kann auch m an einem Vertrag eichen, von dem man den Selbstbehalt als richtig beurteilt. Wir verwenden dazu wieder die Motorfahrzeug-Haftpflichtquote von Tabelle 2 und ein Feuerrisiko, für das wir die in Tabelle 4 zusammengefassten Annahmen treffen. Wie man den Erwartungswert und die Varianz von Feuerschäden bestimmt, steht in Abschnitt 10.2.

| | Motorfahrzeug-Haftpflicht | Feuer |
|---|---|---|
| maximal möglicher Schaden | | 10 000 000 |
| E | 4 000 | 400 000 |
| V | $10.2 \cdot 10^8$ | $1.28 \cdot 10^{12}$ |
| b | 0.1 | 0.15 |
| q | 50% | ? |

Tabelle 4

Den Quotenselbstbehalt für das Feuerrisiko rechnet man unter Anwendung von (6.2) genau gleich aus wie oben den Quotenselbstbehalt für Kasko. Man erhält dann

$$q = 50\% \cdot \frac{0.15}{0.1} \cdot \frac{400\,000}{4\,000} \cdot \frac{4000^2 + 10.2 \cdot 10^8}{400\,000^2 + 1.28 \cdot 10^{12}}$$
$$= 5.40\%$$

Das Maximum wird somit

$$m = 10\,000\,000 \cdot 0.0540$$
$$= 540\,000.$$

# 7 Anwendung auf Schadenexzedenten

Analog zum vorigen Abschnitt betrachten wir, um wie viel eine kleine Erhöhung der Priorität d den Rückversicherungspreis senkt und um wie viel sie die Varianz erhöht.

Ähnlich wie im Fall proportionaler Rückversicherung bezeichnen wir mit c das Verhältnis der Rückversicherungszuschläge zur erwarteten Schadenlast des Rückversicherers. Mit dem Ausdruck «Rückversicherer» ist in diesem Zusammenhang der ganze Rückversicherungsmarkt gemeint. Ein einzelner Rückversicherer würde den Zuschlagsfaktor c von der Priorität d, der Deckung und seinem Vertragsanteil abhängig machen. Die Zuschläge, die der Markt als Ganzes verlangt, hängen dagegen in erster Linie von der Art der gedeckten Risiken ab, das heisst von der Schadenverteilung. Deshalb erlauben wir uns die vereinfachende Annahme, dass c unabhängig von der Höhe der Priorität d sei.

In Abschnitt 10.3 ist hergeleitet, dass das Verhältnis w zwischen der Reduktion des Rückversicherungspreises und der Erhöhung der Varianz im Selbstbehalt sehr einfach wird, nämlich

$$(7.1)\quad w = \frac{c}{2 \cdot d}$$

Es ist bemerkenswert, dass in (7.1) die Form der Schadenverteilung keine Rolle spielt. (7.1) kann man anwenden, wenn man zum Beispiel von der Priorität eines Feuervertrags ausgeht, um die Priorität einer Naturkatastrophendeckung festzulegen. Das Zahlenbeispiel von Tabelle 5 zeigt, welche Grössen man dazu braucht.

| gedecktes Geschäft | Zuschlagsfaktor des Rückversicherers | Priorität |
|---|---|---|
| Feuer | 0.2 | 500 000 |
| Naturkatastrophen | 1.0 | d |

Tabelle 5

Aus (7.1) erhält man

$$\begin{aligned} d &= 500\,000 \cdot 1/0.2 \\ &= 2\,500\,000. \end{aligned}$$

# 8 Kombination von proportionaler Rückversicherung und Schadenexzedenten

Nehmen wir an, ein Bestand werde durch einen Schadenexzedenten mit der Priorität d geschützt und für die gestutzten Schäden bestehe noch ein Quotenvertrag mit dem Quotenselbstbehalt q. Wie müssen d und q aufeinander abgestimmt sein, damit sie den bestmöglichen Schutz vor Schwankungen bieten? Um das zu untersuchen, erhöhen wir die Priorität d ein wenig, was den Preis des Schadenexzedenten reduziert und die Varianz der gestutzten Schäden erhöht. Dann senken wir den Quotenselbstbehalt q so weit, dass die Preiserhöhung der proportionalen Deckung gleich hoch wird wie die Preisreduktion des Schadenexzedenten. Als Folge davon wird die Varianz im proportionalen Selbstbehalt abnehmen. Es sind drei Fälle zu unterscheiden:

1. Die Varianzabnahme als Folge der Reduktion des Quotenselbstbehalts q ist kleiner als die Varianzzunahme als Folge der Prioritätserhöhung. Dann nimmt die Varianz des Erstversicherers insgesamt zu. Mit anderen Worten: Die Veränderung von d und q hat eine Verschlechterung des Schutzes zur Folge. In diesem Fall ist es besser, d zu senken und q zu erhöhen.
2. Der umgekehrte Fall: Die Varianzabnahme als Folge der Reduktion des Quotenselbstbehalts q ist grösser als die Varianzzunahme als Folge der Prioritätserhöhung. Dann nimmt die Varianz des Erstversicherers insgesamt ab, die Veränderung von d und q hat eine Verbesserung des Schutzes zur Folge. In diesem Fall lohnt es sich, d noch weiter zu erhöhen und q noch weiter zu senken.
3. Die Varianzabnahme als Folge der Reduktion des Quotenselbstbehalts q ist gleich gross wie die Varianzzunahme als Folge der Prioritätserhöhung. Dann bleibt die Varianz des Erstversicherers insgesamt gleich, die Veränderung von d und q bringt somit keine Verbesserung mehr. Die Kombination ist optimal.

Unter Verwendung der Bezeichnungen
d für die Priorität,
$E_r$ für den mittleren Schaden der auf der Höhe d gestutzten Verteilung und
$s_r$ für die Schadenhöhe, bei der die gestutzte Verteilung im Gleichgewicht hängen würde, kann man herleiten, dass die optimale Priorität durch

$$(8.1)\ d_o = \frac{2 \cdot E_r \cdot s_r}{E \cdot \frac{b}{c} - (E - E_r)}$$

gegeben ist. Die Herleitung dazu steht in Abschnitt 10.4.

(8.1) ist folgendermassen zu interpretieren: Wenn w so klein ist, dass die Priorität d, die man nach (7.1) berechnet, grösser als $d_o$ wird, dann ist rein nichtproportionale Rückversicherung das günstigste. Käme hingegen nach (7.1) $d < d_o$ heraus, so ist es besser, $d = d_o$ festzusetzen und w durch proportionale Rückversicherung zu erhöhen. Dazu löst man die Beziehung (8.2) nach q auf. (8.2) ist in Abschnitt 10.5 hergeleitet.

$$(8.2)\ w = \frac{c}{2 \cdot d_o \cdot q}$$

Am Verhältnis der Zuschlagsfaktoren im Nenner von (8.1), b/c, sieht man: Je teurer proportionale Rückversicherung im Vergleich zu nichtproportionaler ist, desto niedriger wird die optimale Priorität $d_o$, umso günstiger ist es also, nichtproportionalen Schutz anstelle von proportionalem zu kaufen – an sich wieder eine Selbstverständlichkeit. Man kann zeigen, dass $d_o=0$ ist, falls $c \leq b$ (siehe [2]). Dieser Fall, wo die nichtproportionale Rückversicherung billiger ist als die proportionale, ist wohl eher selten, aber die Konsequenz ist klar: Es ist dann jede Priorität $d > d_o$, die rein nichtproportionale Lösung ist in jedem Fall, für jedes beliebige w, die beste. Wenn andererseits c sehr viel grösser ist als b, wenn also die nichtproportionale Rückversicherung sehr viel teurer ist als die proportionale, dann wird $d_o$ sehr gross oder existiert überhaupt nicht. In diesem Fall ist jedes nach (7.1) bestimmte d kleiner als $d_o$ und die rein proportionale Rückversicherungslösung ist die beste.

Um ein nummerisches Beispiel zu erhalten, wo $d_o$ existiert, ergänzen wir die Annahmen über die Motorfahrzeug-Haftpflicht von Tabelle 2 um folgende Angaben über die Schadenverteilung:

- Die Wahrscheinlichkeit, dass ein diskontierter Schaden 200 000 Euro übersteigt (also ein nicht diskontierter 250 000), beträgt 0.8%.
- Für diskontierte Schäden über 200 000 folgt die Verteilung einer Paretoverteilung mit Parameterwert 3 (Näheres zur Paretoverteilung findet man in [3]).
- Der Zuschlagsfaktor für nichtproportionale Rückversicherung beträgt c=0.3.

In Abschnitt 10.6 wird gezeigt, dass unter diesen Annahmen $d_o$ =669 449 resultiert. Wie bei Tabelle 2 bemerkt, entsprechen der Mittelwert von 4 000 und die Varianz von $10.2 \cdot 10^8$ diskontierten Werten. Falls die nicht diskontierten Werte 25% höher sind, wird auch die nichtdiskontierte optimale Priorität, bei der noch keine proportionale Rückversicherung nötig ist, 25% höher als $d_o$ oder 836 811 Euro. Die Priorität, die im Rückversicherungsvertrag abgemacht wird, ist natürlich die nicht diskontierte.

Tabelle 6 zeigt die optimalen Quoten q und Prioritäten zu einigen ausgewählten Werten von w.

| w | Quote q | Priorität d Barwert | Priorität d Endwert | Endwert·q |
|---|---|---|---|---|
| $2 \cdot 10^{-8}$ | 100% | 7 500 000 | 9 375 000 | 9 375 000 |
| $10^{-7}$ | 100% | 1 500 000 | 1 875 000 | 1 875 000 |
| $2 \cdot 10^{-7}$ | 100% | 750 000 | 937 500 | 937 500 |
| $2.24065 \cdot 10^{-7}$ | 100% | 669 449 | 836 811 | 836 811 |
| $3 \cdot 10^{-7}$ | 74.69% | 669 449 | 836 811 | 625 014 |
| $4 \cdot 10^{-7}$ | 56.02% | 669 449 | 836 811 | 468 782 |

Tabelle 6

In der Sach-Rückversicherung kommt eine weitere Kombination von proportionalen und nichtproportionalen Selbstbehalten vor: Sehr oft trifft man Summenexzedenten, deren Selbstbehalt durch einen Schadenexzedenten pro Risiko und einen Schadenexzedenten pro Ereignis gegen Naturkatastrophen geschützt wird.

Auch in diesem Fall gibt es eine optimale Kombination, nur sind jetzt drei Selbstbehalte aufeinander abzustimmen, nämlich die beiden Prioritäten der Schadenexzedenten und das Maximum des Summenexzedenten. Um dies an einem nummerischen Beispiel zu illustrieren, ergänzen wir die Annahmen über Feuerrisiken in den Tabellen 4 und 5 wie folgt:

- Der maximal mögliche Schaden von 10 000 000 ist das Maximum eines Summenexzedenten, das wir eventuell noch heruntersetzen werden. Risiken mit einem kleineren maximalen Schaden als 10 000 000 ziehen wir dagegen nicht in Betracht.
- Der mittlere Schadengrad der Feuerschäden beträgt 4%. Somit ist der mittlere Feuerschaden im Selbstbehalt des Summenexzedenten 400 000.
- Auf die Feuerrisiken ist die Exposurekurve von Anhang 1 anwendbar.
- Der Zuschlagsfaktor für den Schadenexzedent pro Risiko beträgt $c_F = 0.2$.
- Im Durchschnitt kommt es pro Jahr zu $\lambda_F = 100$ Feuerschäden.
- Die Häufigkeit von Sturmschäden beträgt $\lambda_S = 1/25$, das heisst, es kommt im Mittel einmal in 25 Jahren zu einem Sturmschaden.
- Kein Sturmschaden ist grösser als 100 Millionen.
- Falls ein Sturmschaden eintritt, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass er die Höhe x nicht übersteigt, durch $1\text{-}10\,000\,000/(10\,000\,000+x)$ gegeben (die Höhe der Sturmschäden wird also durch eine Paretoverteilung mit Parameter 1 beschrieben).
- Der Zuschlagsfaktor für den Katastrophen-Schadenexzedenten beträgt $c_S = 1$.

Für die beiden Prioritäten $d_F$ (Feuer) und $d_S$ (Sturm) gilt (7.1). Deshalb ist

$$\frac{c_F}{d_F} = \frac{c_S}{d_S}$$

oder

$$(8.3)\quad d_S = d_F \cdot \frac{c_S}{c_F}$$

Andererseits müssen, wie in Abschnitt 10.7 gezeigt wird, die beiden Prioritäten noch eine Bedingung erfüllen, die eng mit (8.1) verwandt ist. (8.1) kann man anders schreiben, nämlich als

$$(8.4)\quad \frac{2 \cdot E_r \cdot s_r \cdot c}{d_o} - (E \cdot b - c \cdot (E - E_r)) = 0$$

Weil wir jetzt gleichzeitig zwei verschiedene Schadenverteilungen betrachten, erweitern wir die bisherige Notation und bezeichnen mit $E_{Fr}$ den mittleren Schaden der bei $d_F$ gestutzten Feuerschadenverteilung, mit $E_{Sr}$ den mittleren Schaden der bei $d_S$ gestutzten Katastrophenschadenverteilung, und mit $s_{Fr}$ und $s_{Sr}$ die Schadenhöhen, bei denen die gestutzten Verteilungen im Gleichgewicht hängen würden. In der optimalen Kombination der beiden Prioritäten ist die linke Seite von (8.4) für die eine Priorität, z.B. $d_F$, kleiner als 0 und für die andere, in diesem Fall $d_S$, grösser als 0. In der Kombination wird also die Feuerpriorität grösser, als wenn man sie losgelöst von der Katastrophenpriorität festlegen würde und die Katastrophenpriorität wird kleiner. In 10.7 ist hergeleitet, dass sich die beiden Ausdrücke folgendermassen kompensieren müssen:

$$(8.5)\ \lambda_F \cdot \left(\frac{2 \cdot E_r \cdot s_{Fr} \cdot c_F}{d_F} - E_F \cdot b + c_F \cdot (E_F - E_{Fr})\right) + \lambda_S \cdot \left(\frac{2 \cdot E_{Sr} \cdot s_{Sr} \cdot c_S}{d_S} - E_S \cdot b + c_S \cdot (E_S - E_{Sr})\right) = 0$$

Unter den bisher getroffenen Annahmen wird $d_F$ = 3 080 294 und $d_S$ = 15 401 472 (Herleitung in 10.7). Diese Werte sind ähnlich zu interpretieren wie (8.1): Solange w so klein ist, dass aus (7.1) höhere Werte resultieren als $d_F$ und $d_S$, ist die rein nichtproportionale Rückversicherung optimal. Wenn hingegen w so gross wird, dass die nach (7.1) bestimmten Prioritäten kleiner als $d_F$ und $d_S$ werden, ist es günstiger, auf proportionale Rückversicherung auszuweichen. Dazu bestimmt man mit Hilfe von (8.6) oder (8.7) einen proportionalen Selbstbehalt q, mit dem das Maximum des Summenexzedenten, im Beispiel 10 000 000, zu multiplizieren ist.

$$(8.6)\ w = \frac{c_S}{2 \cdot d_S \cdot q}$$

$$(8.7)\ w = \frac{c_F}{2 \cdot d_F \cdot q}$$

In Tabelle 7 sind einige Zahlenbeispiele angegeben.

| W | Quote q | Maximum q·10 000 000 | Feuerpriorität | q·Feuer-priorität | Sturm-priorität | q·Sturm-priorität |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $2 \cdot 10^{-8}$ | 100% | 10 000 000 | 5 000 000 | 5 000 000 | 25 000 000 | 25 000 000 |
| $3.2464429 \cdot 10^{-8}$ | 100% | 10 000 000 | 3 080 294 | 3 080 294 | 15 401 472 | 15 401 472 |
| $10^{-7}$ | 32.46% | 3 246 000 | 3 080 294 | 999 863 | 15 401 472 | 4 999 318 |
| $2 \cdot 10^{-7}$ | 16.23% | 1 623 000 | 3 080 294 | 499 932 | 15 401 472 | 2 499 659 |
| $3 \cdot 10^{-7}$ | 10.82% | 1 082 000 | 3 080 294 | 333 288 | 15 401 472 | 1 666 439 |
| $4 \cdot 10^{-7}$ | 8.12% | 812 000 | 3 080 294 | 250 120 | 15 401 472 | 1 250 600 |

Tabelle 7

Die Zeilen von Tabelle 7, sind – am Beispiel der letzen – folgendermassen zu interpretieren: Wenn das Verhältnis w zwischen Preisabnahme und Varianzzunahme $4 \cdot 10^{-7}$ betragen soll, dann ist das optimale Maximum des Summenexzedenten 812 000; die optimale Priorität des Schadenexzedenten, der den Selbstbehalt des Summenexzedenten gegen grosse Einzelschäden schützt, beträgt 250 120 und die optimale Priorität des Schadenexzedenten, der den Selbstbehalt des Summenexzedenten gegen Naturkatastrophen schützt, beträgt 1 250 600.

Das Verhältnis w zwischen Preiszunahme und Varianzabnahme bestimmt für jeden Bestandteil des Erstversicherungsportefeuilles eine optimale Priorität und einen optimalen Quotenselbstbehalt oder ein Maximum eines Summenexzedenten. Optimal sind sie in dem Sinn, dass sie die Varianz, die dem Erstversicherer noch bleibt, stärker reduzieren als jede andere Kombination von proportionaler und nichtproportionaler Rückversicherung. Die mathematischen Beziehungen zwischen w und den Quoten, Maxima von Summenexzedenten und Prioritäten stehen in (6.1), (6.2), (7.1), (8.1), (8.2), (8.3), (8.5), (8.6) und (8.7). Auf Grund der mittleren Anzahl Schäden und der Schadenverteilung eines jeden Bestandteils des Erstversicherungsportefeuilles kann man die Rückversicherungspreise und die Varianzen im Selbstbehalt berechnen. Die Summe aller Rückversicherungspreise ergibt den gesamten Preis, den der Erstversicherer für Rückversicherung ausgibt, und die Summe der Einzelvarianzen ergibt seine gesamte Varianz im Selbstbehalt (Für Leserinnen und Leser mit Kenntnissen der Wahrscheinlichkeitsrechnung: Wir nehmen dabei an, dass die Bestandteile des Portefeuilles unabhängig sind). Aus der gesamten Varianz lässt sich dann mit Hilfe der Tschebyscheffschen Ungleichung (siehe Abschnitt 3) die Wahrscheinlichkeit abschätzen, ein grosses Kapital zu verlieren. Diese Wahrscheinlichkeit ist ihrerseits eine Entscheidungshilfe für die Wahl von w und damit des gesamten Rückversicherungsprogramms. Zur Illustration dieser Zusammenhänge benützen wir den Motorfahrzeug-Haftpflichtbestand und den Sachbestand aus Abschnitt 8.

Tabelle 8 ist eine Ergänzung zu Tabelle 6. Sie zeigt für unser Beispiel aus der Motorfahrzeug-Haftpflicht zu einigen ausgewählten Werten von w ausser der optimalen Quote q und dem Endwert der Priorität d den zugehörigen Rückversicherungspreis und die Varianz im Selbstbehalt. Während für die Bestimmung der Selbstbehalte die erwartete Anzahl Schäden keine Rolle spielt, braucht man sie zur Berechnung von Preis und Varianz. Wir nehmen $\lambda$=1000 an. Den nummerischen Berechnungen liegen die Annahmen von Abschnitt 10.6 zu Grunde. Zur Preisbestimmung benützt man die Beziehungen (10.10) und (10.16), zur Bestimmung der Varianz die Beziehungen (4.5) und (10.17) .

| w | Quote q | Priorität d Endwert | Preis | Varianz |
|---|---|---|---|---|
| $2 \cdot 10^{-8}$ | 100% | 9 375 000 | 171 | $10.189 \cdot 10^{11}$ |
| $10^{-7}$ | 100% | 1 875 000 | 4 267 | $9.507 \cdot 10^{11}$ |
| $2 \cdot 10^{-7}$ | 100% | 937 500 | 17 067 | $8.653 \cdot 10^{11}$ |
| $3 \cdot 10^{-7}$ | 74.69% | 836 811 | 117 239 | $4.713 \cdot 10^{11}$ |
| $4 \cdot 10^{-7}$ | 56.02% | 836 811 | 187 920 | $2.651 \cdot 10^{11}$ |

Tabelle 8

Berechnet man auch für das Beispiel aus der Sachversicherung in Tabelle 7 den Rückversicherungspreis und die Varianz im Selbstbehalt, erhält man Tabelle 9. Die Berechnungen basieren auf den Annahmen von Abschnitt 10.7. Für die Preisbestimmung des Schadenexzedenten pro Risiko benützt man die Exposuretabelle von Anhang 1, für die Preisbestimmung der Katastrophendeckung das Paretomodell. Die beiden so bestimmten Preise summieren sich zum Preis, der in Tabelle 9 angegeben ist. Die Varianz des Schadenexzedenten pro Risiko findet man mit (4.3), (4.4), (4.5) und (10.6). Für die Bestimmung der Varianz des

Katastrophen-Schadenexzedenten benützt man wie in Abschnitt 10.7 das Paretomodell sowie (4.3), (4.4) und (4.5). Die Varianz in Tabelle 9 ist die Summe der Varianz des Schadenexzedenten pro Risiko und des Schadenexzedenten pro Ereignis.

| w | Quote q | Feuerpriorität | Sturmpriorität | Preis | Varianz |
|---|---|---|---|---|---|
| $2 \cdot 10^{-8}$ | 100% | 5 000 000 | 25 000 000 | 1 217 253 | $1010.911 \cdot 10^{11}$ |
| $10^{-7}$ | 32.46% | 3 080 294 | 15 401 472 | 4 886 075 | $62.881 \cdot 10^{11}$ |
| $2 \cdot 10^{-7}$ | 16.23% | 3 080 294 | 15 401 472 | 5 514 974 | $15.720 \cdot 10^{11}$ |
| $3 \cdot 10^{-7}$ | 10.82% | 3 080 294 | 15 401 472 | 5 724 607 | $6.987 \cdot 10^{11}$ |
| $4 \cdot 10^{-7}$ | 8.12% | 3 080 294 | 15 401 472 | 5 829 230 | $3.935 \cdot 10^{11}$ |

Tabelle 9

Aus den Tabellen 8 und 9 erhalten wir Tabelle 10, indem wir in jeder Zeile die einzelnen Preise und die einzelnen Varianzen zum gesamten Preis bzw. der gesamten Varianz addieren. Je grösser das Verhältnis w, desto grösser wird der gesamte Preis und desto kleiner wird die gesamte Varianz. Je kleiner die Varianz wird, desto kleiner wird auch die Wahrscheinlichkeit, ein bestimmtes Kapital, beispielsweise das Eigenkapital der Gesellschaft, zu verlieren. Man kann sie mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung recht exakt berechnen, man kann sie aber auch wie in Abschnitt 3 einfach durch die grobe Tschebyscheffsche Ungleichung abschätzen. Wenn wir als Kapital 15 000 000 wählen, erhalten wir die Tschebyscheffsche Schranke für die Wahrscheinlichkeit, 15 000 000 zu verlieren, indem wir die entsprechende Varianz durch $15\,000\,000^2$ dividieren.

| w | gesamter Preis | gesamte Varianz | Wahrscheinlichkeit |
|---|---|---|---|
| $2 \cdot 10^{-8}$ | 1 217 424 | $1021.100 \cdot 10^{11}$ | 45.38% |
| $10^{-7}$ | 4 890 342 | $72.388 \cdot 10^{11}$ | 3.22% |
| $2 \cdot 10^{-7}$ | 5 532 041 | $24.373 \cdot 10^{11}$ | 1.08% |
| $3 \cdot 10^{-7}$ | 5 841 846 | $11.700 \cdot 10^{11}$ | 0.52% |
| $4 \cdot 10^{-7}$ | 6 017 150 | $6.586 \cdot 10^{11}$ | 0.29% |

Tabelle 10

Abbildung 7 zeigt die Tschebyscheffsche Wahrscheinlichkeit als Funktion des Rückversicherungspreises. Je höher der Preis, desto kleiner ist die Wahrscheinlichkeit, ein Kapital von 15 000 000 zu verlieren. Falls der Erstversicherer bereit ist, für den Rückversicherungsschutz einen Preis von beispielsweise 5 000 000 zu bezahlen, so nimmt er eine Wahrscheinlichkeit von höchstens 2.5% in Kauf, 15 000 000 zu verlieren.

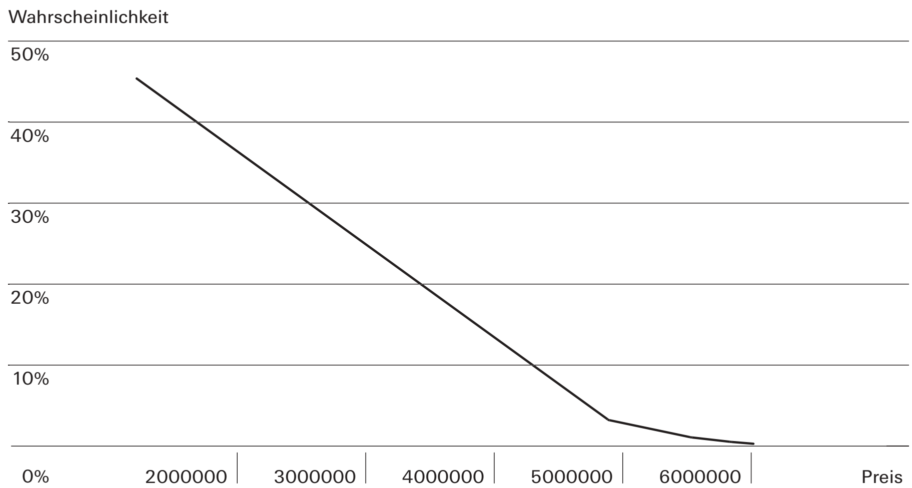



Abbildung 7

Abbildung 8 zeigt das Verhältnis w als Funktion des Rückversicherungspreises. Hat sich der Erstversicherer auf Grund von Abbildung 7 für einen Rückversicherungspreis, z.B. 5 000 000, entschieden, bestimmt man anhand von Abbildung 8 das zugehörige w. In unserem Fall erhält man $w=1.364\cdot10^{-7}$. Damit ist das optimale Rückversicherungsprogramm, das für 5 000 000 erhältlich ist, festgelegt:

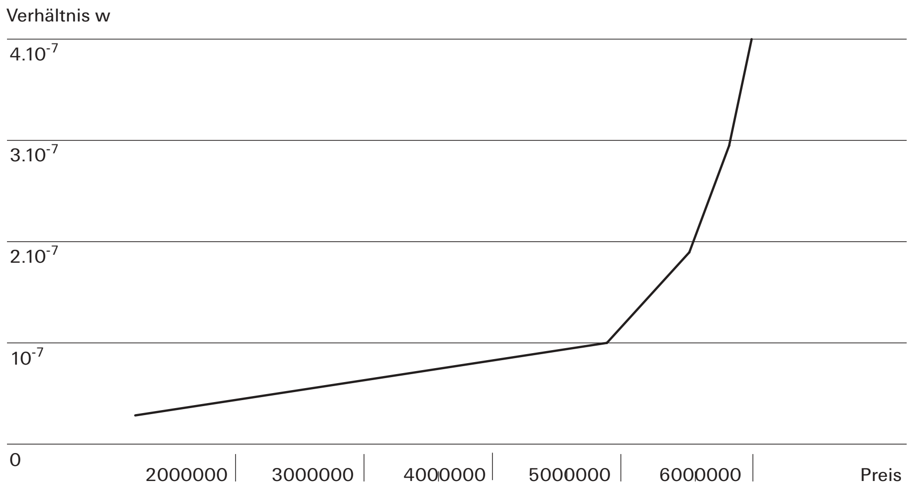



Abbildung 8

Priorität der Motorfahrzeug-Haftpflicht:
Der Barwert der Priorität wird nach (7.1) 1 099 707 und damit höher als $d_o$. Somit ist keine proportionale Rückversicherung nötig. Die vertragliche Priorität entspricht dem Endwert und wird daher 25% höher als der Barwert, also 1 374 634.

Sach-Rückversicherung:
Nach (7.1) wäre die Priorität der Deckung pro Risiko 733 138 und damit niedriger als $d_F$. Somit ist proportionale Rückversicherung nötig. Aus (8.7) erhält man q=23.8%. Das ergibt:

| | | |
|---|---|---|
| Maximum des Summenexzedenten: | 23.8% von 10 000 000 = | 2 380 000 |
| Priorität der Deckung pro Risiko: | 23.8% von 3 080 294 = | 733 110 |
| Priorität der Katastrophendeckung: | 23.8% von 15 401 472 = | 3 665 550 |

# 10 Herleitungen

## 10.1 Das Verhältnis zwischen Preisabnahme und Varianzzunahme im Quotenselbstbehalt

Wir benützen die Notation von Abschnitt 6. Eine kleine Erhöhung des Quotenselbstbehalts q um Δ verringert den Preis um

(10.1) Preisabnahme $=b\cdot\lambda\cdot E\cdot\Delta$.

Die Erhöhung des Quotenselbstbehalts beeinflusst auch die Varianz der Schadenlast im Selbstbehalt. Die erwartete Anzahl Schäden bleibt natürlich gleich, aber der Bestandteil

$E\cdot q\cdot 2\cdot s\cdot q$

nimmt zu. Um wie viel er zunimmt, kann man an Abbildung 9 ablesen. Sie zeigt wie Abbildung 4 ein Rechteck mit der Länge $2\cdot s$ und der Breite E. Der Quotenselbstbehalt q legt in diesem Rechteck ein kleineres Rechteck mit der Länge $2\cdot s\cdot q$ und der Breite $E\cdot q$ fest. Die Fläche dieses kleineren Rechtecks ist somit gleich gross wie der Bestandteil $E\cdot q\cdot 2\cdot s\cdot q$. Sie nimmt um die beiden hellen Streifen zu, wenn man den Quotenselbstbehalt um Δ erhöht. Genau genommen nimmt sie auch noch um das winzige schwarze Rechteck in der rechten oberen Ecke zu, doch das ist vernachlässigbar, wenn nur Δ klein genug ist. Die Flächen der beiden Streifen betragen

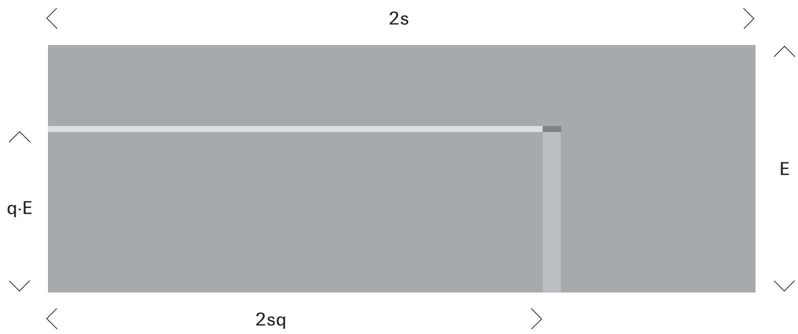



Abbildung 9

$E\cdot q\cdot\Delta\cdot 2\cdot s$ und $2\cdot s\cdot q\cdot\Delta\cdot E$. Daher nimmt infolge der kleinen Erhöhung des Quotenselbstbehalts die Varianz der Schadenlast im Selbstbehalt zu um

(10.2) Varianzzunahme $= \lambda\cdot(E\cdot q\cdot\Delta\cdot 2\cdot s+2\cdot s\cdot q\cdot\Delta\cdot E)$.

Bildet man das Verhältnis der Preisabnahme zur Varianzzunahme, wir nennen es w, dann kürzen sich die erwartete Anzahl Schäden λ und die Erhöhung des Quotenselbstbehalts, Δ, weg, und es bleibt

$$(10.3)\ w = \frac{b \cdot E}{E \cdot 2 \cdot s \cdot q \cdot 2}$$

(10.3) ist Beziehung (6.1) aus Abschnitt 6. Den Nenner von (10.3) kann man mit Hilfe von Beziehung (2.2) noch umformen. Dann wird das Verhältnis w zwischen Preisabnahme und Varianzzunahme

$$(10.4)\ w = \frac{b \cdot E}{(E^2 + V) \cdot 2 \cdot q}$$

Dies ist Beziehung (6.2) aus Abschnitt 6.

## 10.2 Erwartungswert und Varianz von Feuerrisiken

Um den Erwartungswert von Feuerschäden zu bestimmen, ist es zweckmässig, Schadengradstatistiken zu benützen. Der Schadengrad ist definiert als das Verhältnis zwischen Schadenhöhe und MPL bzw. zwischen Schadenhöhe und Versicherungssumme. Sein Mittelwert hängt von der betrachteten Risikoart ab und liegt in der Grössenordnung von wenigen Prozenten des MPLs bzw. der Versicherungssumme.

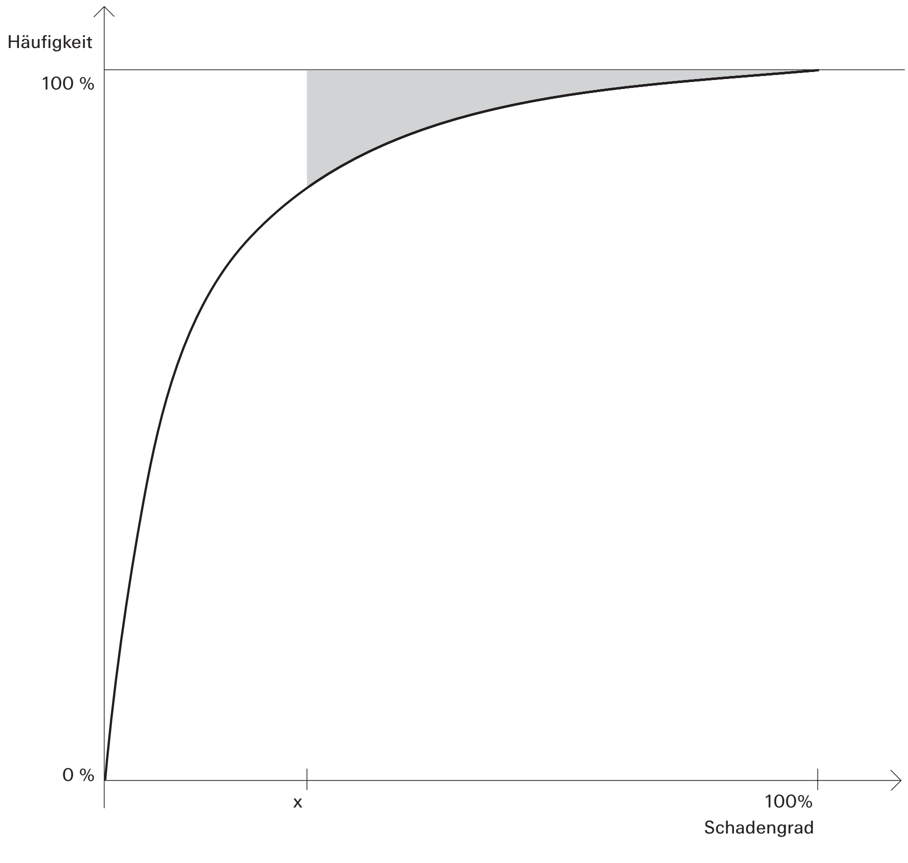



Abbildung 10

Abbildung 10 zeigt ein Beispiel einer Verteilung des Schadengrades. Die Fläche, die durch die vertikale Achse, die Horizontale auf der Höhe 100% und die Kurve selber begrenzt ist, ist gleich gross wie der erwartete Schadengrad (Näheres zu diesen Beziehungen steht in [3]). Die dunkle Fläche rechts vom Schadengrad x gibt an, um wie viel im Mittel der Schadengrad den Wert x übersteigt. Dividiert man diese Fläche durch den erwarteten Schadengrad, also durch die gesamte Fläche über der Kurve, so erhält man als Verhältnis den mittleren Anteil des x übersteigenden Schadengrads am erwarteten Schadengrad. Abbildung 11 zeigt die Differenz zwischen 1 und diesem Verhältnis für alle Schadengrade x von 0 bis 100%. Derartige Kurven nennt man Exposurekurven. Sie werden für die Bestimmung von Risikoprämien in der Schadenexzedententarifierung benützt. Exposuretabellen dienen dem gleichen Zweck. Sie geben den Wert von der Exposurekurve bis zur Horizontalen auf 100% als Funktion des Schadengradwerts in Tabellenform an. In Anhang 1 steht ein Beispiel einer Exposuretabelle.

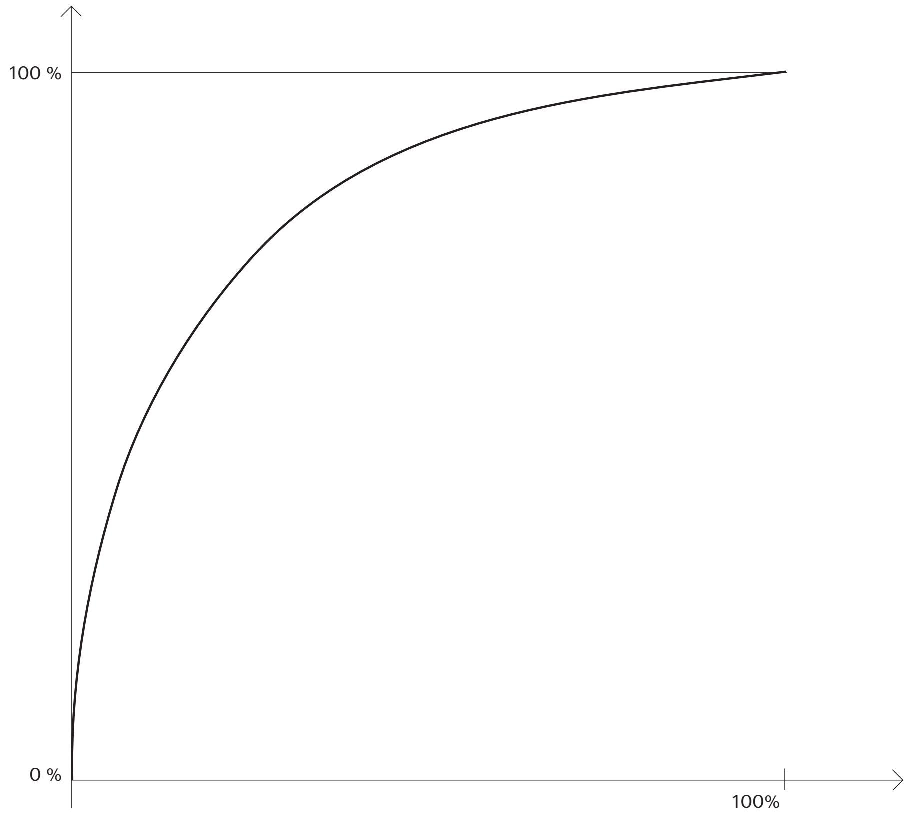



Abbildung 11

Man erhält den erwarteten Schaden eines Risikos, indem man seinen erwarteten Schadengrad mit dem MPL bzw. der Versicherungssumme multipliziert.

Ähnlich wie die Fläche über der Verteilungskurve in Abbildung 10 den erwarteten Schadengrad darstellt, stellt auch die Fläche über der Exposurekurve eine interpretierbare Grösse dar und zwar den Schadengrad s, bei dem die Verteilung im Gleichgewicht hängen würde. Dies sieht man folgendermassen:

Wir ersetzen die Fläche über der Verteilungskurve von Abbildung 10 durch schmale vertikale Streifen von der beliebigen Breite d. Abbildung 12 zeigt ein Beispiel mit d=10%. Der untere Rand dieser Streifen bildet eine Treppe, die sich um so weniger von der Schadengradverteilung unterscheidet, je kleiner d ist. Die Länge jedes Streifens hängt von der Verteilung ab. So beträgt sie beispielsweise für den Streifen zwischen den Schadengraden 30% und 40% 1-F(0.35). Seine Fläche ist somit gleich 0.1·(1-F(0.35)). Die Verteilung hängt dann beim Schadengrad s im Gleichgewicht, wenn die Summe aller Streifenflächen, multipliziert mit ihrem Abstand von der vertikalen Achse, gleich gross ist wie die ganze Fläche E multipliziert mit s, also

$$(10.5)\quad 0.05\cdot 0.1\cdot(1-F(0.05))+0.15\cdot 0.1\cdot(1-F(0.15))+\ldots\ldots+0.95\cdot 0.1\cdot(1-F(0.95))=s\cdot E$$

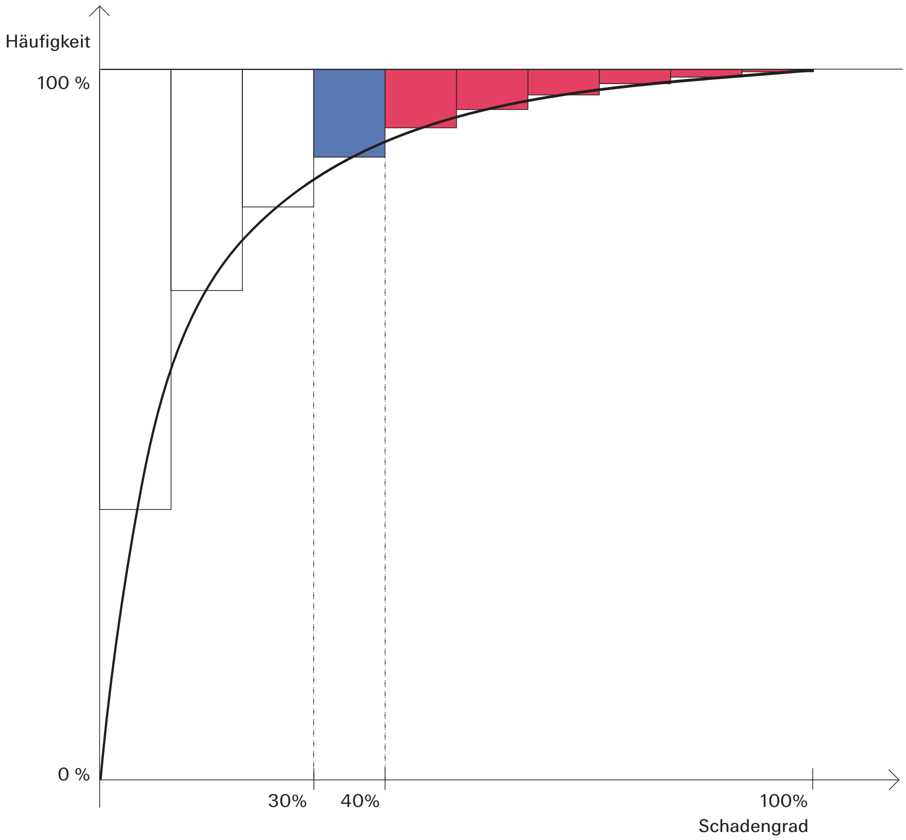



Abbildung 12

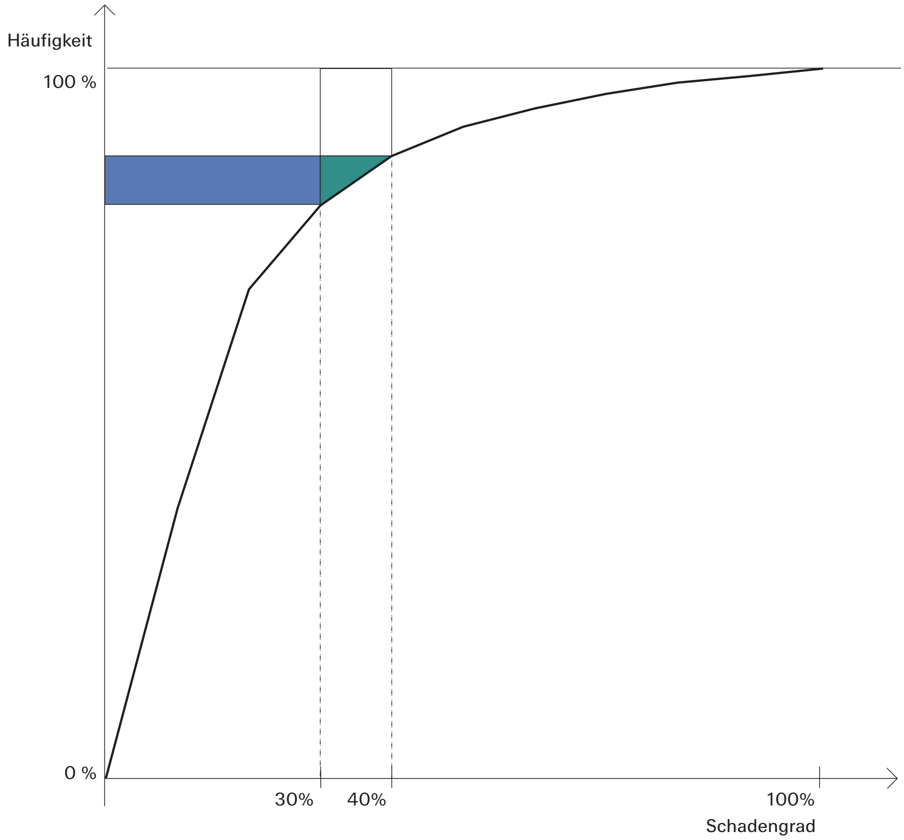



Abbildung 13

Abbildung 13 zeigt die zur Treppe von Abbildung 12 gehörende Exposurekurve. Wir berechnen das Flächenstück über der Kurve, das durch das blaue Rechteck und das grüne Dreieck gebildet wird. Beim Schadengrad 40% beträgt der Abstand der Exposurekurve zur Horizontalen auf der Höhe 100% gleich viel wie die rote Fläche in Abbildung 12, dividiert durch die gesamte Fläche, also durch den erwarteten Schadengrad. Beim Schadengrad 30% ist der Abstand der Exposurekurve zur Horizontalen der Höhe 100% noch etwas grösser, nämlich um das Verhältnis der blauen Fläche in Abbildung 12, dividiert durch die ganze Fläche, also um

$$\frac{0.1 \cdot (1-F(0.35))}{E}$$

Somit ist die Fläche des blauen Rechtecks in Abbildung 13 mit der Länge 0.3

$$0.3 \cdot \frac{0.1(1-F(0.35))}{E}$$

Die Fläche des grünen Dreiecks in Abbildung 13 beträgt

$$0.5 \cdot 0.1 \cdot \frac{0.1(1-F(0.35))}{E}$$

Daher ist die Summe der Flächen des blauen Rechtecks und des grünen Dreiecks gleich

$$0.35 \cdot \frac{0.1(1-F(0.35))}{E}$$

Genau gleich kann man weitere Flächenstücke über der Exposurekurve berechnen, und man sieht, dass sie sich aufsummieren zur linken Seite von (10.5), dividiert durch E, also zu s. Mit (2.2) erhält man aus E und s die Varianz des Schadengrads.

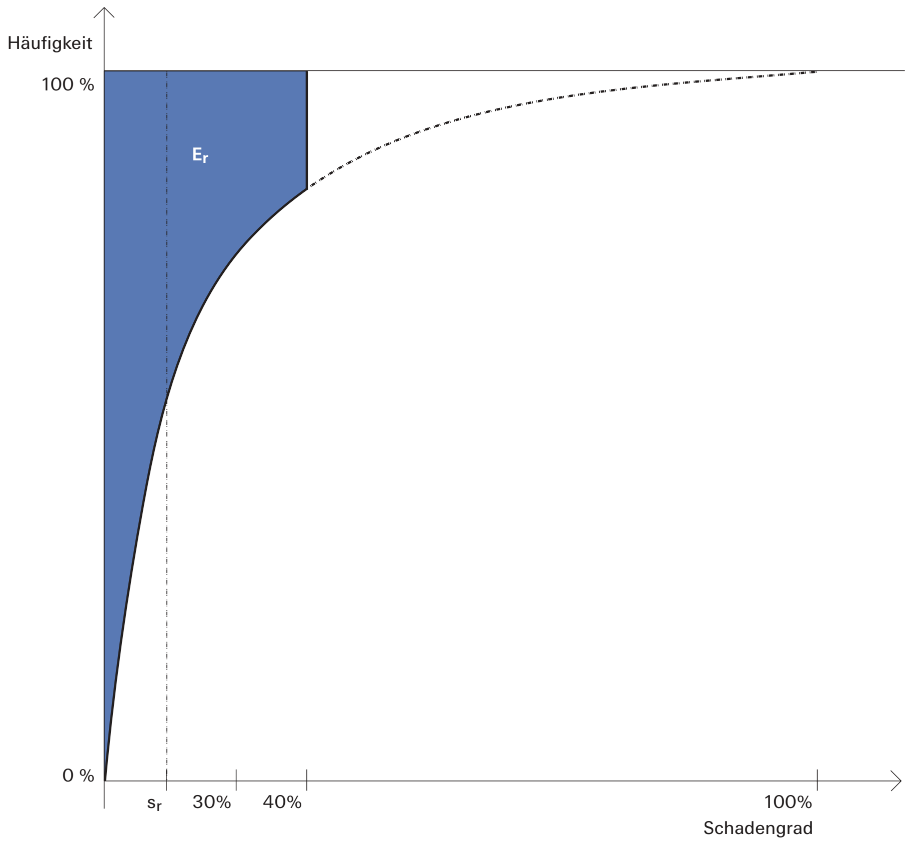



Abbildung 14

Auf die gleiche Art erhält man den erwarteten Schadengrad und die Varianz einer Schadengradverteilung, die bei einer Priorität gestutzt wird, zum Beispiel bei 40%. Dies sieht man an den Abbildungen 14 und 15. Die Schadengradverteilung in Abbildung 14 entsteht aus Abbildung 12 durch Stutzen beim Schadengrad 40%. Die blaue Fläche über der Kurve stellt den mittleren gestutzten Schadengrad $E_r$ dar. Die gestutzte Verteilung hängt nun nicht mehr beim Schadengrad s im Gleichgewicht, sondern bei einem kleineren Wert $s_r$. Um ihn zu finden, muss man in (10.5) nur die vertikalen Streifen unterhalb der Priorität 40% berücksichtigen, also

$$(10.6)\ 0.05\cdot 0.1\cdot(1-F(0.05))+\dots\dots+0.35\cdot 0.1\cdot(1-F(0.35)) = s_r\cdot E_r$$

Abbildung 15 zeigt das gleiche blaue Rechteck und das gleiche grüne Dreieck wie Abbildung 13. Den Rest der dunklen Fläche in Abbildung 15 bestimmt man auf die gleiche Art. Daraus sieht man, dass die Fläche über der Exposurekurve, die links durch die vertikale Achse begrenzt ist und oben durch die Horizontale, welche die Kurve beim Wert der Priorität schneidet, gleich gross ist wie die linke Seite von (10.6), dividiert durch E. Diese Zusammenhänge zwischen der Exposurekurve, E, $E_r$, und $s_r$ nützt man aus, wenn man $s_r$ in einem konkreten Fall bestimmt, beispielsweise mit einem Tabellenkalkulationsprogramm.

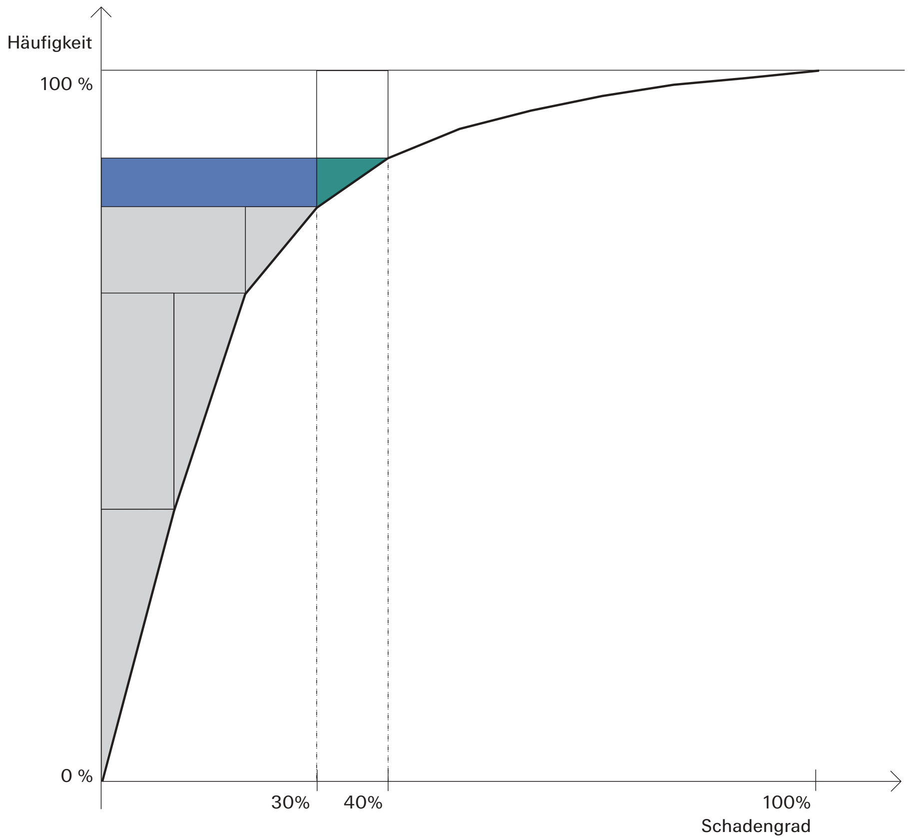



Abbildung 15

## 10.3 Das Verhältnis zwischen Preisabnahme und Varianzzunahme im Selbstbehalt von Schadenexzedenten

Wir betrachten Abbildung 16. Es ist

- d die Priorität
- H der Anteil der Anzahl Schäden, die im Mittel die Priorität übersteigen. Multipliziert man H mit der mittleren Anzahl Schäden $\lambda$, so erhält man die mittlere Anzahl Exzessschäden.
- $E_r$ der mittlere Schaden der auf der Höhe d gestutzten Verteilung
- $s_r$ die Schadenhöhe, bei der die gestutzte Verteilung im Gleichgewicht hängen würde
- $\Delta$ ein kleiner Betrag, z.B. 1 Euro, um den die Priorität d erhöht werden soll.

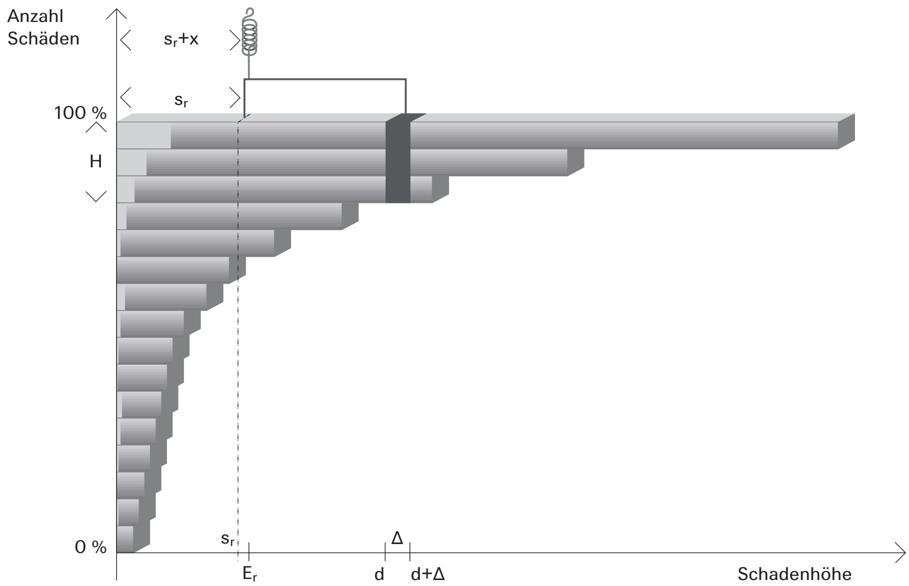



Abbildung 16

Die erwartete Anzahl Schäden des Rückversicherers beträgt $\lambda \cdot H$. Wenn der Erstversicherer von jedem Exzessschaden $\Delta$ selber trägt, reduziert sich die erwartete Schadenlast des Rückversicherers um $\lambda \cdot H \cdot \Delta$, so dass der Rückversicherungspreis um

$$(10.7)\ \text{Preisabnahme} = \lambda \cdot H \cdot \Delta \cdot c$$

kleiner wird. Gleichzeitig erhöht sich der mittlere Schaden der gestutzten Verteilung um $H \cdot \Delta$. In Abbildung 16 ist der Streifen $H \cdot \Delta$ dunkel dargestellt. Um zu berechnen, um wie viel die Varianz zunimmt, muss man wissen, wie weit der Streifen $H \cdot \Delta$ die Schadenhöhe $s_r$ nach rechts verschiebt. Wir bezeichnen diese Zunahme mit x. Wenn man die gestutzte Verteilung nach der Erhöhung der Priorität auf $d+\Delta$ bei der Schadenhöhe $s_r + x$ aufhängt, ist sie im Gleichgewicht. Links vom neuen Aufhängepunkt hängt im Abstand x das Gewicht $E_r$, rechts im Abstand $d-s_r-x+0.5 \cdot \Delta$ das Gewicht $H \cdot \Delta$. Damit Gleichgewicht herrscht, muss gelten

$$x \cdot E_r = (d - s_r - x + 0.5 \cdot \Delta) \cdot H \cdot \Delta$$

$$= (d - s_r) \cdot H \cdot \Delta - x \cdot H \cdot \Delta + 0.5 \cdot \Delta \cdot H \cdot \Delta$$

$\Delta$ und x sind sehr klein. Werden sie miteinander multipliziert, wird das Produkt vernachlässigbar. Die obenstehende Gleichung wird deshalb praktisch zu

$$x \cdot E_r = (d - s_r) \cdot H \cdot \Delta$$

oder, nach x aufgelöst,

$$x = \frac{(d - s_r) \cdot H \cdot \Delta}{E_r}$$

Vor der Erhöhung der Priorität um $\Delta$ beträgt die Varianz der Schadenlast im Selbstbehalt nach Beziehung (4.3) $\lambda \cdot E_r \cdot 2 \cdot s_r$. Nach der Erhöhung beträgt sie $\lambda \cdot (E_r + H \cdot \Delta) \cdot 2 \cdot (s_r + x)$ oder, ausmultipliziert,

$$\lambda \cdot E_r \cdot 2 \cdot s_r + \lambda \cdot H \cdot \Delta \cdot 2 \cdot s_r + \lambda \cdot E_r \cdot 2 \cdot x + \lambda \cdot H \cdot \Delta \cdot 2 \cdot x.$$

Der erste Summand in diesem Ausdruck ist die Varianz vor der Erhöhung. Der letzte wird vernachlässigbar klein, da er das Produkt der kleinen Grössen $\Delta$ und x enthält. Die Erhöhung der Varianz, die ins Gewicht fällt, besteht aus den beiden mittleren Summanden. Setzt man im zweiten für $E_r \cdot x$ den Ausdruck $(d - s_r) \cdot H \cdot \Delta$ ein, so wird die Erhöhung der Varianz

$$\text{(10.8) Varianzzunahme} = \lambda \cdot 2 \cdot \Delta \cdot H \cdot d.$$

Im Verhältnis zwischen der Reduktion des Rückversicherungspreises, $\lambda \cdot H \cdot \Delta \cdot c$, und der Erhöhung der Varianz, kürzt sich fast alles weg. Was bleibt, wird also ganz einfach, nämlich

$$\text{(10.9) } w = \frac{c}{2 \cdot d}$$

(10.9) ist die Beziehung (7.1) aus Abschnitt 7.

## 10.4 Die optimale Kombination von proportionaler Rückversicherung und Schadenexzedent

Wir verwenden die in 10.3 festgelegte Notation. Abbildung 17 zeigt, wie der erwartete Schaden, also die Fläche über der Verteilungskurve, zwischen Erst- und Rückversicherer aufgeteilt wird, wenn gleichzeitig eine Quote und ein Schadenexzedent einen Teil der Schadenlast übernehmen. Der Quotenselbstbehalt sei q. Die grüne Fläche beträgt (1-q)·E und stellt den Anteil der Quotenrückversicherung am erwarteten Schaden dar. Der Rückversicherungspreis für die Übernahme dieses Anteils ist, wenn λ die erwartete Anzahl Schäden bezeichnet, λ· (1-q)·E·b. Die Summe aus der blauen und der roten Fläche zeigt den Anteil des erwarteten Schadens, der im Quotenselbstbehalt bleibt. Die Priorität d würde jeden Schaden auf der Höhe d stutzen, falls keine Quote vorhanden wäre. Die Summe der Flächen links von d, also die hellgrüne, die rote und die blaue, stellen daher den erwarteten gestutzten Schaden $E_r$ dar. Die Schäden im Quotenselbstbehalt werden durch die Priorität q·d gestutzt. Die blaue Fläche stellt demnach $q \cdot E_r$ dar und die rote $q \cdot (E-E_r)$. Die rote Fläche ist der Anteil des erwarteten Schadens, den der Schadenexzedent übernimmt. Der Preis für diese Übernahme beträgt $\lambda \cdot q \cdot (E-E_r) \cdot c$. Der gesamte Preis für die Rückversicherung ist die Summe der Preise für die Quote und für den Schadenexzedenten:

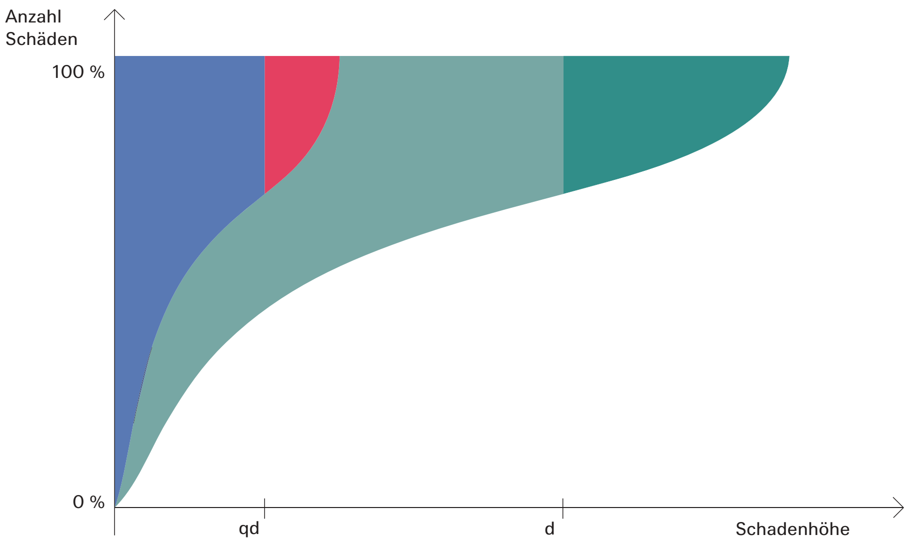



Abbildung 17

$$(10.10)\ \text{Preis} = \lambda \cdot [(1-q) \cdot E \cdot b + q \cdot (E-E_r) \cdot c]$$

Nun erhöhen wir die Priorität ein wenig und reduzieren gleichzeitig den Quotenselbstbehalt gerade um so viel, dass sich der gesamte Preis nicht verändert. Bezeichnen wir die Erhöhung der Priorität mit $\Delta_1$, dann beträgt die Preisreduktion des Schadenexzedenten nach (10.7) $\lambda \cdot H \cdot \Delta_1 \cdot c$. Davon entfällt $\lambda \cdot H \cdot \Delta_1 \cdot c \cdot q$ auf den Quotenselbstbehalt. Die Reduktion des Quotenselbstbehalts bezeichnen wir mit $\Delta_2$. Aus (10.10) und (10.1) folgt, dass die zugehörige Preiszunahme

$$(10.11)\ \lambda\cdot(\ E\cdot b - c\cdot(E-E_r))\cdot\Delta_2$$

beträgt. Der Anteil q der Preisreduktion des Schadenexzedenten und die Preiszunahme der Quote sind gleich hoch, wenn

$$\lambda\cdot H\cdot\Delta_1\cdot c\cdot q = \lambda\cdot(\ E\cdot b - c\cdot(E-E_r))\cdot\Delta_2$$

gilt. Nach $\Delta_2$ aufgelöst, ist das

$$(10.12)\ \Delta_2 = \frac{H\cdot\Delta_1\cdot c\cdot q}{E\cdot b-c\cdot(E-E_r)}$$

Als Folge der Prioritätserhöhung nimmt gemäss (10.8) die Varianz im Selbstbehalt des Schadenexzedenten um $\lambda\cdot 2\cdot\Delta_1\cdot H\cdot d$ zu. Im Quotenselbstbehalt ist die Prioritätszunahme $\Delta_1$ auf $\Delta_1\cdot q$ reduziert und d auf $d\cdot q$. Die Varianz nimmt dort also um $\lambda\cdot 2\cdot\Delta_1\cdot H\cdot d\cdot q\cdot q$ zu. Andererseits nimmt die Varianz im Quotenselbstbehalt nach (10.2) um $\lambda\cdot E_r\cdot q\cdot\Delta_2\cdot 4\cdot s_r$ ab. Insgesamt bleibt die Varianz genau dann gleich, wenn

$$(10.13)\ \lambda\cdot 2\cdot\Delta_1\cdot H\cdot d\cdot q\cdot q = \lambda\cdot E_r\cdot q\cdot\Delta_2\cdot 4\cdot s_r$$

ist, oder, nach Einsetzen von (10.12) und Kürzen

$$d = \frac{2\cdot E_r\cdot s_r\cdot c}{E\cdot b-c\cdot(E-E_r)}$$

Es ist nicht von vornherein klar, dass es überhaupt eine Priorität d gibt, die die obige Gleichung erfüllt. Auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens steht ja ein Ausdruck, der selber von d bestimmt wird ($s_r$ und $E_r$ hängen von d ab), und der kann je nach der Grösse von b und c höher oder tiefer als d werden. Falls es überhaupt eine Priorität gibt, die die Gleichung erfüllt, bezeichnen wir sie mit $d_o$. Wenn wir noch mit c kürzen, erhalten wir

$$(10.14)\ d_o = \frac{2\cdot E_r\cdot s_r}{E\cdot\frac{b}{c}-(E-E_r)}$$

(10.14) ist die gleiche Beziehung wie (8.1).

## 10.5 Herleitung der Beziehung (8.2)

Der Ausdruck (10.11) gibt an, um wie viel sich der Preis erhöht, wenn man den Quotenselbstbehalt q um $\Delta_2$ senkt, oder umgekehrt, um wie viel der Preis abnimmt, wenn man q um $\Delta_2$ erhöht. Die dazugehörige Varianzzunahme erhält man, indem man (10.2) auf den Selbstbehalt eines Schadenexzedenten anwendet: Man ersetzt E durch $E_r$, s durch $s_r$ und $\Delta$ durch $\Delta_2$. Somit wird das Verhältnis von Preisabnahme und Varianzzunahme nach Kürzen mit $\lambda$ und $\Delta_2$

$$(10.15)\quad w = \frac{b \cdot E - c \cdot (E - E_r)}{E_r \cdot 2 \cdot s_r \cdot q \cdot 2}$$

(10.15) gilt für jede Kombination von Schadenexzedenz und Quote, insbesondere auch dann, wenn man für den Schadenexzedenten die optimale Priorität $d_o$ nimmt. In diesem Fall ist (10.14) erfüllt und man darf (10.15) mit (10.14) multiplizieren und nach w auflösen. Das Ergebnis ist (8.2).

## 10.6 Bestimmung von $d_o$ mit Hilfe einer Paretoverteilung

Wir nehmen an, die Schadenverteilung in Abbildung 18 sei für kleine Schäden (kleiner als u) nicht bekannt. Dagegen habe sie rechts von der Schadenhöhe u die Form einer Paretoverteilung. Es gilt also

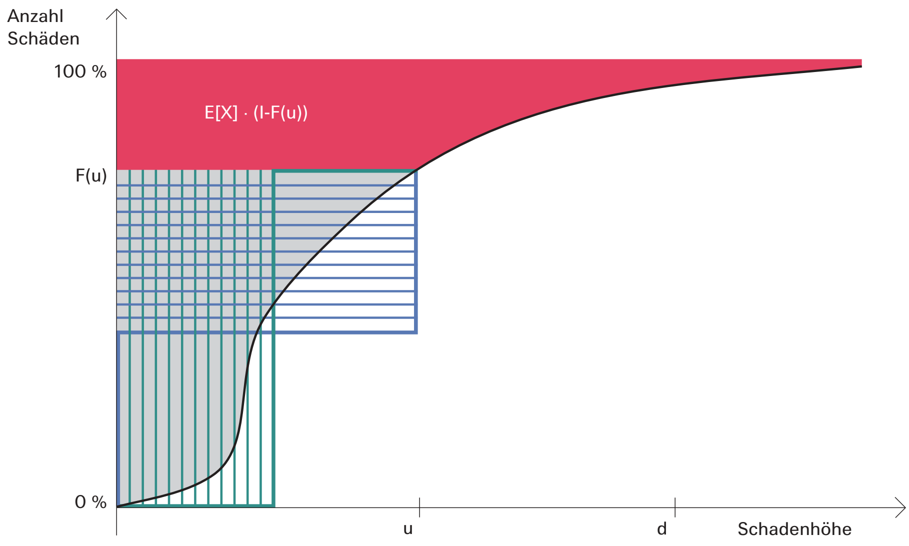



Abbildung 18

$$1-F(x) = \left(\frac{u}{x}\right)^{\alpha} \cdot (1-F(u))$$

Die bedingte Schadenverteilung, unter der Bedingung, dass der Einzelschaden X die Höhe u übersteigt, ist somit eine Paretoverteilung mit der Verteilungsfunktion

$$P(X \leq x) = 1 - \left(\frac{u}{x}\right)^{\alpha}$$

Unter der Annahme $\alpha > 2$ ist für diese Paretoverteilung

$$E[X] = u \cdot \frac{\alpha}{\alpha-1}$$

und

$$E[X^2] = u^2 \cdot \frac{\alpha}{\alpha-2}$$

Für den bei d gestutzten Einzelschaden $Y=X-(X-d)^+$ gilt

$$E[Y] = \frac{u}{\alpha-1} \cdot \left(\alpha - \left(\frac{u}{d}\right)^{\alpha-1}\right)$$

und

$$E[Y^2] = \frac{u^2}{\alpha-2} \cdot \left(\alpha - 2 \cdot \left(\frac{u}{d}\right)^{\alpha-2}\right)$$

E bezeichne den Erwartungswert der Schadenverteilung von Abbildung 18 und $E_r$ den Erwartungswert der bei d gestutzten Verteilung. Dann ist

$$(10.16)\ E_r = E - E[X] \cdot (1-F(u)) + E[Y] \cdot (1-F(u)).$$

Mit Hilfe von E, $E_r$ und der Varianz V der ungestutzten Schadenverteilung kann man die Varianz $V_r$ der bei d gestutzten Verteilung berechnen, nämlich durch

$$(10.17)\ E_r^2 + V_r = E^2 + V - E[X^2] \cdot (1-F(u)) + E[Y^2] \cdot (1-F(u))$$

Wenn man nun noch den Zähler von (8.1) in Analogie zu (2.2) durch $E_r^2 + V_r$ ersetzt, ist $d_o$ bestimmt.

Es gibt nicht zu beliebigen Werten von E, V und F(u) eine Paretoverteilung, die (10.16) und (10.17) erfüllt, sondern es müssen die Ungleichungen (10.18), (10.19) und (10.20) erfüllt sein.

$$(10.18)\ E[X] \cdot (1-F(u)) \leq E$$

Dies folgt unmittelbar aus Abbildung 18. Die gesamte Fläche zwischen der Vertikalen bei 0, der Horizontalen auf der Höhe 1 und der Verteilungskurve ist gleich gross wie E und daher sicher mindestens so gross wie die rote Fläche.

Ersetzt man in Abbildung 18 den Teil der Verteilungskurve zwischen 0 und u durch den grünen Streckenzug, wobei die grün schraffierte Fläche gleich gross ist wie die graue, so erhält man eine Verteilung, die für $x > u$ mit der ursprünglichen übereinstimmt, den gleichen Erwartungswert E, aber eine kleinere Varianz hat. Diese Varianz plus das Quadrat von E ist gleich dem Ausdruck auf der linken Seite des Ungleichheitszeichens in (10.19)

$$(10.19)\ E[X^2]\cdot(1-F(u)) + \frac{[E-E[X]\cdot(1-F(u))]^2}{F(u)} \leq E^2 + V$$

Ersetzt man die ursprüngliche Verteilung unterhalb u durch den blauen Streckenzug, wobei die blau schraffierte Fläche gleich gross ist wie die graue, so erhält man eine Verteilung, die für $x > u$ mit der ursprünglichen übereinstimmt, den gleichen Erwartungswert E, aber eine grössere Varianz hat. Der Ausdruck auf der linken Seite von (10.20) ist gleich dieser Varianz plus dem Quadrat des Erwartungswerts.

$$(10.20)\ E[X^2]\cdot(1-F(u)) + [E-E[X](1-F(u))]\cdot u \leq E^2 + V$$

Mit den numerischen Werten $b=0.1$, $c=0.3$, $\alpha=3$, $1-F(u) = 0.008$ und $d=669\,449$ wird $E_r=3\,928.5972$, $E_r^2+V_r = 844\,797\,981.6237$ , so dass d (8.1) erfüllt ist.

## 10.7 Die optimale Kombination von proportionaler Rückversicherung mit zwei Schadenexzedenten

Wir ergänzen die Notation von 10.4, um zwischen den beiden Schadenverteilungen, unter denen man sich konkret Feuer- und Sturmschäden vorstellen kann, zu unterscheiden. Es ist also

- $\lambda_F$ die mittlere Anzahl Feuerschäden
- $d_F$ die Feuerpriorität
- $H_F$ der Anteil der Anzahl Feuerschäden, die im Mittel die Priorität übersteigen. Multipliziert man $H_F$ mit der mittleren Anzahl Feuerschäden $\lambda_F$, so erhält man die mittlere Anzahl Feuer-Exzessschäden.
- $E_{Fr}$ der mittlere Schaden der auf der Höhe $d_F$ gestutzten Feuerschadenverteilung
- $s_{Fr}$ die Schadenhöhe, bei der die gestutzte Feuerschadenverteilung im Gleichgewicht hängen würde
- $\Delta_F$ ein kleiner Betrag, um den die Priorität $d_F$ erhöht werden soll
- $\lambda_S$ die mittlere Anzahl Sturmereignisse
- $d_S$ die Sturmpriorität
- $H_S$ der Anteil der Anzahl Sturmschäden, die im Mittel die Priorität übersteigen. Dabei ist jeder Sturmschaden aus kleineren Einzelschäden zusammengesetzt. Multipliziert man $H_S$ mit der mittleren Anzahl Sturmereignisse $\lambda_S$, so erhält man die mittlere Anzahl Sturmexzessschäden.
- $E_{Sr}$ der mittlere Schaden der auf der Höhe $d_s$ gestutzten Sturmschadenverteilung
- $s_{Sr}$ die Schadenhöhe, bei der die gestutzte Sturmschadenverteilung im Gleichgewicht hängen würde

$\Delta_S$ ein kleiner Betrag, um den die Priorität $d_s$ erhöht werden soll
q der Quotenselbstbehalt
$\Delta_2$ eine kleine Reduktion des Quotenselbstbehalts

Für die beiden Schadenexzedenten gilt (8.3). Daraus folgt

$$(10.21)\ \Delta_S = \Delta_F \cdot \frac{c_S}{c_F}$$

Eine Erhöhung der Feuerpriorität um $\Delta_F$ hat analog zu der Herleitung in 10.4 eine Preisreduktion des Feuer-Schadenexzedenten um $\lambda_F \cdot H_F \cdot \Delta_F \cdot c_F$ zur Folge. Gleichzeitig steigt wegen (10.21) auch die Sturmpriorität, was eine Reduktion des Sturmpreises von $\lambda_S \cdot H_S \cdot \Delta_S \cdot c_S$ nach sich zieht. Die gesamte Preisreduktion, die aus den Erhöhungen der Feuer- und der Sturmpriorität resultiert, beträgt, wenn man mit (10.21) $\Delta_S$ ersetzt,

$$\lambda_F \cdot H_F \cdot \Delta_F \cdot c_F + \lambda_S \cdot H_S \cdot \Delta_F \cdot \frac{c_S}{c_F} \cdot c_S$$

Von dieser Preisreduktion entfällt der Anteil q auf den Quotenselbstbehalt, also

$$q \cdot \Delta_F \cdot (\lambda_F \cdot H_F \cdot c_F + \lambda_S \cdot H_S \cdot \frac{c_S}{c_F} \cdot c_S)$$

Nun senken wir den Quotenselbstbehalt um $\Delta_2$ und erhöhen dadurch den Preis der proportionalen Deckung in Analogie zu (10.11) um

$$\lambda_F \cdot (E_F \cdot b - c_F \cdot (E_F - E_{Fr})) \cdot \Delta_2 + \lambda_S \cdot (E_S \cdot b - c_S \cdot (E_S - E_{Sr})) \cdot \Delta_2$$

Der gesamte Rückversicherungspreis bleibt unverändert, falls die Preisabnahme als Folge der Prioritätserhöhungen und die Preiszunahme als Folge der Reduktion des Quotenselbstbehalts gleich hoch sind. In diesem Fall ist

$$(10.22)\ q \cdot \Delta_F \cdot (\lambda_F \cdot H_F \cdot c_F + \lambda_S \cdot H_S \cdot \frac{c_S}{c_F} \cdot c_S) = \lambda_F \cdot (E_F \cdot b - c_F \cdot (E_F - E_{Fr})) \cdot \Delta_2$$
$$+ \lambda_S \cdot (E_S \cdot b - c_S \cdot (E_S - E_{Sr})) \cdot \Delta_2$$

Als Folge der Erhöhung der Prioritäten wird die Varianz in den Selbstbehalten der beiden Schadenexzedenten grösser, als Folge der Reduktion des Quotenselbstbehalts nimmt sie wieder ab. Insgesamt bleibt sie genau dann gleich, wenn in Analogie zu (10.13)

$$\lambda_F \cdot 2 \cdot \Delta_F \cdot H_F \cdot d_F \cdot q^2 + \lambda_S \cdot 2 \cdot \Delta_F \cdot \frac{c_S}{c_F} \cdot c_S \cdot H_S \cdot d_S \cdot q^2 = \lambda_F \cdot E_{Fr} \cdot q \cdot \Delta_2 \cdot 4 \cdot s_{Fr} + \lambda_S \cdot E_{Sr} \cdot q \cdot \Delta_2 \cdot 4 \cdot s_{Sr}$$

gilt. Nach Kürzen und Ersetzen von $d_s$ mit Hilfe von (8.3) bleibt

$$(10.23) \lambda_F \cdot \Delta_F \cdot H_F \cdot d_F \cdot q + \lambda_S \cdot \Delta_F \cdot \frac{c_S}{c_F} \cdot H_S \cdot d_F \cdot \frac{c_S}{c_F} \cdot q = \lambda_F \cdot E_{Fr} \cdot \Delta_2 \cdot 2 \cdot s_{Fr} + \lambda_S \cdot E_{Sr} \cdot \Delta_2 \cdot 2 \cdot s_{Sr}$$

Multipliziert man (10.23) mit $c_F$ und dividiert man durch $d_F$, so wird die linke Seite der Gleichung gleich gross wie die linke Seite von (10.22). Daher sind auch die rechten Seiten gleich. Wenn man sie voneinander subtrahiert und durch $\Delta_2$ dividiert, erhält man

$$(10.24)\ \lambda_F \cdot \left( \frac{2 \cdot E_{Fr} \cdot s_{Fr} \cdot c_F}{d_F} - E_F \cdot b + c_F \cdot (E_F - E_{Fr}) \right) + \lambda_S \cdot \left( \frac{2 \cdot E_{Sr} \cdot s_{Sr} \cdot c_S}{d_S} - E_S \cdot b + c_S \cdot (E_S - E_{Sr}) \right) = 0$$

(10.24) ist identisch mit (8.5).

Die nummerischen Werte von $d_F$ und $d_S$ findet man am einfachsten mit einem Tabellenkalkulationsprogramm. Benützt man die Exposuretabelle von Anhang 1, so bekommt man unter den Annahmen von Abschnitt 8 für m=10 000 000 und $E_F$ = 400 000 folgende Werte:
Zur Priorität $d_F$ = 3 080 294
wird $E_{Fr}$ = 315 865.8
Nach (Abschnitt 10.2) ist

$$\frac{s_{Fr} \cdot E_{Fr}}{E} = [0.005 \cdot 0.2206 + 0.015 \cdot (0.2614 - 0.2206) + 0.025 \cdot (0.2995 - 0.2614) + \ldots + 0.295 \cdot (0.7830 - 0.7743)$$

$$+ (0.3 + 0.0080294 \cdot 0.5) \cdot (0.7913 - 0.7830) \cdot 0.80294] \cdot 10^7$$
$$= 685\,200.76$$

Der letzte Summand in der eckigen Klammer ist durch eine Interpolation begründet. Wäre $d_F$ = 3 000 000, so würde er 0.295 · (0.7913 - 0.7830) betragen. Für $d_F$ = 3 080 294 beträgt er jedoch nur

$$(0.3 + 0.0080294 \cdot 0.5) \cdot (0.7913 - 0.7830) \cdot \frac{3\,080\,294 - 3\,000\,000}{3\,100\,000 - 3\,000\,000}$$

$$= 0.3040147 \cdot (0.7913 - 0.7830) \cdot 0.80294.$$

In der eckigen Klammer wird mit Schadengraden zwischen 0 und 1 gerechnet und nicht mit Währungseinheiten. Daher ist sie noch mit dem Maximum des Summenexzedenten, $10^7$, zu multiplizieren.

$$2 \cdot E_{Fr} \cdot s_{Fr} = 2 \cdot 685200.76 \cdot 400\,000$$
$$= 5.481606 \cdot 10^{11}.$$

Die Sturmschäden werden nach den Annahmen von Abschnitt 8 als Exzessschäden einer Paretoverteilung beschrieben, wobei die Priorität $10^7$, die Deckung $10^8$ und der Paretoparameter 1 beträgt. Die nummerischen Werte von $E_{Sr}$ und $2 \cdot E_{Sr} \cdot s_{Sr}$ berechnet man am bequemsten anhand der Beziehungen aus [3], Anhang 1. Dort wird allerdings eine andere Notation verwendet, nämlich $E[(X\text{-}OP)^2]$ anstelle von $2 \cdot E_{Sr} \cdot s_{Sr}$. Für $d_s = 15\,401\,472$ erhält man

$$E_S = 10^7 \cdot \ln(11)$$
$$= 23\,978\,953$$

$$E_{Sr} = 10^7 \cdot \ln\left(\frac{10^7 + 15\,401\,472}{10^7}\right)$$
$$= 10^7 \cdot \ln(2.5401472)$$
$$= 9\,322\,220$$

und

$$2 \cdot E_{Sr} \cdot s_{Sr} = 2 \cdot 10^{14} \cdot \left(\frac{10^7 + 15\,401\,472}{10^7} - 1 - \ln\left(\frac{10^7 + 15\,401\,472}{10^7}\right)\right)$$
$$= 1.21585 \cdot 10^{14}$$

Mit $\lambda_F = 100$, $\lambda_S = 0.04$, $b=0.15$, $c_F = 0.2$ und $c_S = 1$ ist (10.24) erfüllt.

## Anhang 1: Exposuretabelle

Die untenstehende Exposuretabelle ist auf Grund von Schäden am Inhalt von Verwaltungsgebäuden, Schulen, Spitälern usw. mit einem MPL von mehr als Sfr. 50 000 (Wert 1984) berechnet worden.

d: deductible in %
P: Rückversicherungsrisikoprämie in % der Risikoprämie

| d | P | d | P | d | P | d | P | d | P |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 77.94 | 21 | 30.91 | 41 | 13.92 | 61 | 6.05 | 81 | 2.67 |
| 2 | 73.86 | 22 | 29.70 | 42 | 13.35 | 62 | 5.82 | 82 | 2.50 |
| 3 | 70.05 | 23 | 28.54 | 43 | 12.80 | 63 | 5.61 | 83 | 2.33 |
| 4 | 66.50 | 24 | 27.44 | 44 | 12.27 | 64 | 5.41 | 84 | 2.15 |
| 5 | 63.18 | 25 | 26.39 | 45 | 11.76 | 65 | 5.21 | 85 | 1.98 |
| 6 | 60.08 | 26 | 25.37 | 46 | 11.27 | 66 | 5.03 | 86 | 1.79 |
| 7 | 57.17 | 27 | 24.40 | 47 | 10.80 | 67 | 4.85 | 87 | 1.61 |
| 8 | 54.46 | 28 | 23.47 | 48 | 10.34 | 68 | 4.68 | 88 | 1.42 |
| 9 | 51.91 | 29 | 22.57 | 49 | 9.91 | 69 | 4.52 | 89 | 1.23 |
| 10 | 49.53 | 30 | 21.70 | 50 | 9.49 | 70 | 4.36 | 90 | 1.05 |
| 11 | 47.29 | 31 | 20.87 | 51 | 9.10 | 71 | 4.21 | 91 | 0.87 |
| 12 | 45.19 | 32 | 20.06 | 52 | 8.72 | 72 | 4.05 | 92 | 0.69 |
| 13 | 43.22 | 33 | 19.28 | 53 | 8.36 | 73 | 3.90 | 93 | 0.53 |
| 14 | 41.36 | 34 | 18.53 | 54 | 8.01 | 74 | 3.75 | 94 | 0.45 |
| 15 | 39.61 | 35 | 17.80 | 55 | 7.69 | 75 | 3.61 | 95 | 0.38 |
| 16 | 37.96 | 36 | 17.10 | 56 | 7.38 | 76 | 3.46 | 96 | 0.30 |
| 17 | 36.39 | 37 | 16.42 | 57 | 7.08 | 77 | 3.30 | 97 | 0.23 |
| 18 | 34.91 | 38 | 15.76 | 58 | 6.80 | 78 | 3.15 | 98 | 0.15 |
| 19 | 33.51 | 39 | 15.13 | 59 | 6.54 | 79 | 2.99 | 99 | 0.08 |
| 20 | 32.18 | 40 | 14.51 | 60 | 6.29 | 80 | 2.83 | 100 | 0.00 |

## Anhang 2: Verwendete Symbole

| | |
|---|---|
| $\alpha$ | Paretoparameter |
| b | Zuschlagsfaktor der proportionalen Rückversicherung |
| c | Zuschlagsfaktor der Schadenexzedenten-Rückversicherung |
| d | Priorität |
| $d_o$ | optimale Priorität in der Kombination von proportionaler Rückversicherung und Schadenexzedent |
| $\Delta$ | kleine Änderung der Priorität oder des Quotenselbstbehalts |
| E | Erwartungswert des Einzelschadens |
| $E_r$ | Erwartungswert des gestutzten Einzelschadens |
| E[..] | Erwartungswert |
| F(x) | Verteilungsfunktion der Schadenhöhe |
| H | Anteil der Anzahl Schäden, die im Mittel die Priorität übersteigen |
| $\lambda$ | erwartete Anzahl Schäden pro Jahr |
| M | maximaler Schaden |
| m | Maximum eines Summenexzedenten |
| q | proportionaler Selbstbehalt, Quotenselbstbehalt |
| s | Schadenhöhe, bei der die Einzelschadenverteilung im Gleichgewicht hängen würde |
| $s_r$ | Schadenhöhe, bei der die gestutzte Einzelschadenverteilung im Gleichgewicht hängen würde |
| u | kleinster Schaden einer Paretoverteilung |
| V | Varianz des Einzelschadens |
| $V_r$ | Varianz des gestutzten Einzelschadens |
| V[Z] | Varianz der Schadenlast |
| w | Verhältnis zwischen Preisreduktion und Varianzzunahme im Selbstbehalt |
| X | Schadenhöhe, die einer Paretoverteilung folgt |
| Y | Schadenhöhe, die einer gestutzten Paretoverteilung folgt |
| Z | Schadenlast |

## Anhang 3: Literatur


[1] Finetti Bruno de (1940): Il problema dei «pieni». Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari, Roma, Anno XI, No. 1.

[2] Schmitter Hans (1987): Eine optimale Kombination von proportionalem und nichtproportionalem Selbstbehalt. Mitteilungen der Vereinigung Schweiz. Versicherungsmathematiker, Heft 2, 229–236.

[3] Schmitter Hans, Bütikofer Peter (1997): Abschätzung von Risikoprämien für Sach-Schadenexzedenten mit Hilfe des Paretomodells. Swiss Re.

[4] Schmutz Markus (1999): Gestaltung von Sach-Rückversicherungsprogrammen. Der pragmatische Ansatz. Swiss Re.

Titel: Die Bestimmung von optimalen
Rückversicherungs-Selbstbehalten

Autor:
Hans Schmitter
RC, Chief Underwriting Office

Programmierung:
Pamela Hall

Redaktion/Realisation:
Technical Communications
Chief Underwriting Office
Language Services
Division Communications & Human
Resources

Zusätzliche Exemplare sowie eine
Übersicht über die Swiss Re-Publika-
tionen (Swiss Re Publishing – Our
expertise for your benefit) können
bestellt werden bei:

Swiss Re
Mythenquai 50/60
Postfach
CH-8022 Zürich
Telefon +41 1 285 2121
Telefax +41 1 285 2023
E-Mail publications@swissre.com

Swiss Re-Publikationen sind
auch in elektronischer Form im
Internet verfügbar:
www.swissre.com

Bestell-Nr.: 207_01288_de

UW, 8/01, 2000 de