

Probabilità

Premessa

I temi della probabilità e della statistica sono entrati ormai da tempo nel linguaggio e nell'uso comune, inoltre la probabilità, insieme al calcolo della probabilità ad esso collegato, si è affermata come componente notevole della matematica e come potente strumento in ambito scientifico e tecnologico.

L'importanza di questa tematica è stata recepita in ambito scolastico e di fatto nella stesura dei programmi ministeriali dei corsi sperimentali (p.es. quelli della commissione Brocca) la trattazione della probabilità e del calcolo della probabilità presente sia al biennio che al triennio e sia per il programma forte (sci/spe) che per il programma debole (clp). Precisamente dopo una trattazione introduttiva fatta al biennio nel triennio clp (programma debole) la trattazione della probabilità è ripresa ed affrontata al quinto anno; ciò che è presente al quinto anno clp è invece affrontato al quarto anno di studi per gli indirizzi sci/spe (programma forte) che prosegue nell'ultimo anno fino alla trattazione di variabili aleatorie continue e le distribuzioni notevoli di probabilità.

Motivazioni didattiche

Prima di procedere oltre ricordiamo brevemente alcune motivazioni didattiche dello studio della probabilità e del calcolo delle probabilità:

- probabilità e statistica si prestano molto bene ad un lavoro di matematizzazione e sistematizzazione formale della realtà che è riconosciuto essere, da più parti, un obiettivo strategico da perseguire nella scuola superiore;
- le numerose applicazioni nelle scienze sociali, statistiche ed economiche, nelle scienze naturali e fisiche possono essere il veicolo per una visione della matematica più dinamica ed aperta verso il mondo reale;
- una esigenza di un graduale passaggio dalla intuizione alla razionalizzazione: il discorso sulla probabilità si presta infatti ad un percorso didattico che partendo dalle definizioni intuitive e comunemente diffuse di probabilità ne faccia risaltare limiti e problematiche di applicazione fino alla richiesta di una formalizzazione, che anche se più astratta, sia condivisibile come un modello assiomatico logicamente inattaccabile;
- i temi della probabilità e statistica rappresentano una occasione al triennio per operare una azione di recupero, integrazione ed approfondimento di molti temi trattati al biennio;
- nella trattazione della probabilità è possibile affiancare dei momenti importanti in cui l'attività didattica si sposta in aula d'informatica per avvalersi dell'elaboratore elettronico per elaborare dati, effettuare verifiche, presentare dei risultati sottoforma di grafici e tabelle.

Di seguito si propone la struttura di una unità didattica sui fondamenti della probabilità fino alla formula di Bayes.

Introduzione

La presente unità didattica è indirizzata ad una classe quinta CLP od ad una quarta classe di un L.S. Brocca, si prevede di aver già svolto una trattazione di calcolo combinatorio, cosa che si fa al terzo anno del programma debole ed al biennio del programma forte.

Questa unità didattica si può inserire in un percorso in cui gli argomenti di statistica siano stati già trattati precedentemente in quanto atti a fornire semplici modelli capaci di aprire le problematiche concettuali della probabilità.

I concetti già affrontati in prima approssimazione al biennio, vengono qui ripresi approfonditi e formalizzati anche in relazione allo sviluppo intellettuale raggiunto dagli allievi.

Prerequisiti

- Concetti base della teoria degli insiemi: operazione di unione, intersezione, passaggio al complemento, prodotto cartesiano.
- Elementi di calcolo combinatorio.
- Equazioni e funzioni.

Obiettivi Generali (Finalità)

Lo studio della probabilità e del calcolo delle probabilità contribuisce al perseguimento delle seguenti finalità:

- acquisizione di un linguaggio specifico;
- acquisizione della capacità di dimostrare e generalizzare;
- acquisizione di conoscenze a livelli più elevati di astrazione e formalizzazione;
- utilizzare metodi, modelli e strumenti matematici in situazioni d'incertezza;
- sollecitare la partecipazione attiva degli allievi facendo leva sulla loro capacità d'intuizione e scoperta;
- sollecitare la padronanza a fronteggiare una impostazione ciclica dello studio in cui le stesse nozioni e gli stessi concetti possono essere affrontati a più riprese, con approfondimenti via via maggiori;
- promuovere la padronanza dei processi di analisi, sintesi e valutazione;
- padronanza linguistica – modellistica – comunicativa;
- sviluppare conoscenza e consapevolezza dei propri processi mentali (metacognizione);
- interessi sempre più pregnanti per cogliere gli aspetti genetici e momenti storico – filosofici del pensiero matematico.

Obiettivi cognitivi

- sapere di cosa si occupa il calcolo delle probabilità;
- conoscere le varie definizioni di probabilità;
- conoscere i teoremi fondamentali di somma e prodotto;
- conoscere il concetto di probabilità condizionata e di correlazione tra eventi;
- saper enunciare e dimostrare il teorema di Bayes.

Obiettivi operativi

- saper costruire ed operare nell'ambito di modelli probabilistici;
- saper calcolare la probabilità in semplici casi;
- saper calcolare la probabilità di un evento condizionato al verificarsi di un altro evento;
- stabilire quando due eventi sono stocasticamente indipendenti;
- saper applicare il teorema di Bayes.

Contenuti

- Profilo storico, introduzione al calcolo delle probabilità, evoluzione del concetto di probabilità;
- processo aleatorio, risultati ed eventi, operazioni sugli eventi;
- probabilità classica, contesto di applicazione, esercizi;
- probabilità frequentista, soggettivista, assiomatica;
- la probabilità condizionata, esercizi;
- regola del prodotto;
- il teorema di Bayes e la formula della probabilità totale;
- correlazione ed indipendenza.

Ipotesi di un percorso per l'introduzione della probabilità

Lo studio della probabilità e del calcolo delle probabilità è una conquista relativamente recente del pensiero matematico, si pensi infatti che nell'antichità i matematici greci disconoscevano del tutto questo tipo di calcolo, durante il medioevo non ci fu alcuna applicazione di rilievo e nel seicento fu sviluppato questo tipo di calcolo ma associato ad un contesto prevalentemente ludico (riuscita nelle scommesse, aspettative di vincita).

Nel settecento, il secolo dei lumi, abbiamo l'affermarsi di una mentalità in netto contrasto con le moderne idee sulla probabilità:

- il determinismo che si afferma soprattutto con le teorie di Newton porta ad una concezione del mondo imperniata sull'ordine e la regolarità;
- per i filosofi illuministi il corso degli eventi era rigidamente fissato, l'ordine della natura veniva considerato perfetto e nessuna azione umana poteva modificarlo;
- tutti effetti che percepiamo seguono le loro cause, le conosciamo o no;
- per gli illuministi era scientifico ciò che si basava sulla certezza, scarsamente scientifico ciò che si basava sulla probabilità.

Una prima rara eccezione a questi concetti si ha nella seconda metà del Seicento con i lavori dell'inglese J. Groust che fonda "l'aritmetica politica" che porterà agli sviluppi recenti della moderna statistica, uno dei più validi strumenti di conoscenza e di previsione dei fenomeni sociali ed economici.

Non si possono dimenticare in questo contesto i "padri fondatori", ovvero Pascal e Fermat, la percezione di Pascal è la lontana origine del moderno concetto di probabilità e più in generale della scienza e specialmente della fisica, secondo cui tutto quello che possiamo fare è costruire modelli matematici che descrivono con una validità approssimativa e provvisoria i fenomeni che osserviamo: i modelli deterministici sufficienti per una

rappresentazione largamente approssimativa, vanno sostituiti, per una comprensione più approfondita con modelli basati su leggi probabilistiche.

Un salto significativo, per il calcolo delle applicazioni su larga scala, si ebbe con il matematico Daniel Bernoulli, che elaborò delle tabelle di calcolo per valutare l'efficacia della vaccinazione contro il vaiolo e stabilì la probabilità di morte ... con i suoi calcoli Bernoulli indicava che la vaccinazione conveniva ai governi in quanto la maggior parte della popolazione ne traeva vantaggio. E' inevitabile attribuire a queste idee il valore di un cambiamento culturale nella storia del pensiero matematico che culmina con l'affermazione delle idee sul "probabilismo" e in determinismo nei primi decenni dell'ottocento ed il successivo sviluppo degli studi statistici e del calcolo delle probabilità. [... lettura stimolo "casualità e determinismo nella storia del pensiero scientifico dell'occidente"].

Metodologia e sviluppo dei contenuti.

L'attività didattica in aula dovrebbe iniziare con la presentazione degli argomenti e la condivisione degli obiettivi da perseguire, l'individuazione dei prerequisiti consentirà di formulare delle prove di verifica per accertarsi delle nozioni propedeutiche possedute dai discenti in relazione al percorso didattico che si intende sviluppare. In questa fase si opera per il consolidamento ed il recupero che può anche attuarsi parallelamente all'attività introduttiva di presentazione dei contenuti. Quindi si può proseguire con una breve premessa storica sullo sviluppo del calcolo della probabilità, e la discussione può assumere un valore interdisciplinare, in particolare con il docente di storia e filosofia.

Si prosegue poi, con una definizione intuitiva di probabilità, recuperando e consolidando i concetti già visti al biennio, inoltre si sottolinea in questa sede come l'oggetto del calcolo della probabilità sia connesso con la costituzione e l'impiego di modelli probabilistici. Il passo successivo è quello di discutere la definizione classica, che è la più semplice e quella maggiormente condivisa ad un livello intuitivo, si possono precisare i limiti ed i problemi di applicazione con semplici casi. Così l'esigenza di definire un modello per il calcolo diventa più forte man mano che i problemi saranno diventati via via più complessi, qui si inseriscono in modo preciso le definizioni di *risultato* ω , *spazio dei risultati* Ω , *evento*, si parlerà di eventi semplici ed eventi composti, eventi certi ed eventi impossibili, eventi elementari ed eventi come proposizioni logiche connesse al fenomeno aleatorio.

Si dovrà far riflettere gli allievi su come la necessità di avere una più larga condivisione del e chiarezza di quello che si sta facendo (anche in termini di comunicabilità tra alunno ed alunno, tra alunno ed insegnante, o leggibilità dei libri di testo) comporti un prezzo da pagare in termini di condivisione delle definizioni (gli enti di cui si parla ed oggetto del nostro interesse) e di conoscenza delle relazioni tra gli enti. Ciò può essere ottenuto solo con l'acquisizione di un linguaggio adeguato.

Assimilati gli eventi alle nozioni d'insiemistica si procederà a riprendere le operazioni sugli insiemi, cioè gli eventi nello spazio dei risultati, l'analogia è molto potente e si mostrano varie applicazioni, in particolare l'unione di eventi, il prodotto, il complemento, la differenza tra insiemi.

Si definiscono quindi gli eventi incompatibili, e si riconosce il concetto di partizione di eventi. A questo stadio è ormai improrogabile dare la definizione rigorosa di probabilità, quindi prima di procedere oltre ci si sofferma sulle varie definizioni, sul loro significato; dopo aver sottolineato l'importanza dell'approccio soggettivista di De Finetti, la discussione può concludersi con l'osservazione di una esigenza di sistematizzazione e formalizzazione di un linguaggio appropriato che gli allievi hanno ormai imparato a padroneggiare.

La definizione assiomatica appare quindi come una conseguenza logica ed una esigenza spontanea in questo percorso didattico.

Successivamente si affronta il tema del condizionamento, chiarendo con esercizi ed esempi il significato di dipendenza logica e dipendenza stocastica.

La dipendenza stocastica porta alla trattazione della probabilità condizionata, quindi la regola della moltiplicazione, si può concludere il percorso didattico con la formula di Bayes.

Tutti questi argomenti vengono trattati e presentati mediante un congruo numero di esempi validi ad agevolarne la comprensione.

Alcuni contenuti...

Oggetto del calcolo delle probabilità è l'impiego di modelli probabilistici.

evento	→ il manifestarsi di un fenomeno, avvenimento
evento certo	→ avvenimento che si verifica certamente nel corso di una data prova
evento impossibile	→ avvenimento che non ha luogo a verificarsi nel corso di una prova
evento aleatorio	→ avvenimento di incerta realizzazione

Il calcolo delle probabilità si propone di associare ad ogni evento un numero, denominato *probabilità dell'evento*, che ci consente di esprimere rigorosamente “il grado di possibilità” di verificarsi che l'evento possiede.

Conoscere la probabilità di ciascun evento casuale consente di affermare a priori, quale tra due eventi casuali è dotato di maggior “grado” di possibilità di realizzarsi.

La definizione classica

Probabilità è il rapporto tra il numero dei casi favorevoli e quello dei casi possibili, si noti che i casi possibili qui s'intendono tutti “egualmente possibili”.

Già dalla definizione classica seguono le proprietà:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

$$P(\emptyset) = 0$$

$$P(\Omega) = 1$$

se A e B sono *incompatibili* $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ gli eventi A e B sono detti eventi XOR

In sostanza la definizione classica si applica quando si considera un numero finito di casi possibili e valgono le condizioni di simmetria (casi egualmente possibili).

La definizione frequentista (probabilità a posteriori)

La definizione frequentista si basa sulla *legge empirica del caso* secondo cui in un gran numero di prove fatte tutte nelle medesime condizioni, la frequenza relativa dei successi si avvicina alla probabilità, e l'approssimazione in genere migliora con l'aumentare del numero delle prove.

Possiamo identificare la probabilità con la frequenza relativa dei successi in un gran numero di prove fatte tutte nelle medesime condizioni.

Anche la definizione frequentista ha degli aspetti negativi, difatti si ha che la probabilità è data dalla frequenza relativa di successi in un gran numero di prove fatte nelle medesime condizioni:

- non si precisa quanto grande debba essere il numero di prove;
- bisogna ripetere le prove nelle medesime condizioni.

L'impostazione soggettivista

Questa impostazione è stata particolarmente sviluppata dal matematico Bruno de Finetti. “La probabilità è il grado di fiducia nel verificarsi dell’evento.” Pertanto dipende dalla persona che la valuta e dalle informazioni disponibili.

Un modo per precisare meglio la definizione, restando sempre nella impostazione soggettivista è definire la probabilità “come il prezzo equo da pagare per ricevere 1 se l’evento si verifica e niente nel caso contrario.

La critica più forte che viene mossa a questa definizione è che così facendo la probabilità viene ad essere fondata sull’opinione dei singoli. Ma il calcolo delle probabilità, in particolare nella impostazione soggettivista, viene ad essere indagato come *logica dell’incerto*.

L'impostazione assiomatica

Questa impostazione è largamente preferita in ogni campo della matematica, perché permette di ottenere un livello accettabile di rigore logico, il calcolo delle probabilità con l’impostazione assiomatica assolve alla esigenza di sistematizzazione che è elemento qualificante della moderna disciplina scientifica.

Dato uno spazio dei risultati Ω , la probabilità degli eventi (insiemi) di Ω è il grado di fiducia che riponiamo nel verificarsi degli eventi stessi, essa è quindi una funzione definita sugli eventi di Ω a valori reali e tale da soddisfare le seguenti proprietà:

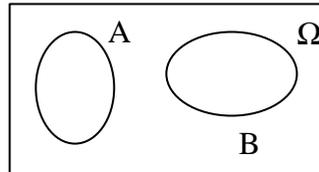
- a. per ogni evento $A \in \Omega$, $P(A) \geq 0$
- b. $P(\Omega) = 1$
- c. se A e B sono eventi disgiunti, ovvero $A \cap B = \emptyset$ allora $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

La probabilità condizionata

Si premettono dei concetti inerenti la correlazione tra eventi.

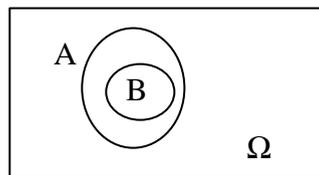
Def. *dipendenza logica* : due eventi si dicono logicamente dipendenti se il realizzarsi di uno di essi p.es $A(V/F)$ ci da informazioni precise sul realizzarsi della condizione logica (V/F) per l'evento B .

Nello spazio dei risultati Ω si consideri il realizzarsi di A , si ha che B è falso, il realizzarsi di B implica che A non può realizzarsi;



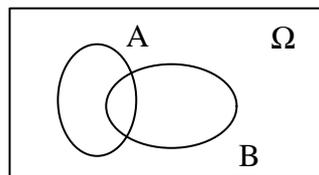
gli eventi A e B sono dunque logicamente dipendenti e si dicono in questo caso mutuamente esclusivi e incompatibili.

Vediamo ancora qualche esempio:



con $B \subset A$, è ovvio che se si realizza B , anche A sarà vero.

In un caso in cui:



nulla si può dire su B se sappiamo che A si è verificato e viceversa, gli eventi non sono logicamente dipendenti, ma a seconda di come si assegna la probabilità, il realizzarsi di A può modificare il realizzarsi di B e viceversa.

In tali circostanze gli eventi A e B si dicono *stocasticamente dipendenti*.

Da un punto di vista soggettivista possiamo affermare che per eventi stocasticamente dipendenti il realizzarsi di B modifica le nostre aspettative di successo per il realizzarsi di A e ciò è connesso con il modo in cui è assegnata la probabilità, ovvero dal tipo di informazioni di cui noi siamo in possesso sul sistema in studio.

Probabilità condizionata

Siano A e B due eventi ($A, B \subset \Omega$) di cui siano assegnati i valori della probabilità $P(A)$ e $P(B) > 0$.

Si definisce probabilità di A condizionata a B e la si denota con $P(A/B)$ la:

$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ ed analogamente se B è condizionato ad A con $P(A) > 0$ si ha che la

probabilità di B condizionata al verificarsi di A è data dalla seguente espressione:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad (1)$$

Esercizio:

Un'urna contiene 8 palline di cui 5 bianche e 3 nere, si estraggono successivamente due palline senza reimmissione, calcolare la probabilità che la seconda pallina sia bianca sapendo che la prima pallina estratta era nera; la probabilità che la seconda pallina sia bianca sapendo che la prima estratta era nera.

Caso a : indichiamo con A [prima pallina estratta nera] e la probabilità associata a questo evento è $P(A) = 3/8$ essendo 8 i casi equipollenti e 3 i casi favorevoli al realizzarsi di A, indichiamo con B [seconda pallina estratta bianca] i casi equipossibili sono ora sette e cinque i casi favorevoli quindi $P(B/A) = 5/7$ che è dunque la probabilità condizionata dell'evento B subordinato ad A.

Caso b : sia A_1 [pallina bianca alla prima estrazione] e $P(A_1) = 5/8$ sempre senza reimbussolamento, e sia A_2 [pallina bianca alla seconda estrazione] $P(A_2/A_1) = 4/7$.

Dalla (1) segue il cosiddetto teorema della probabilità composta o regola della moltiplicazione:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

e si enuncia dicendo che *la probabilità del prodotto di due eventi è uguale al prodotto della probabilità di uno degli eventi per la probabilità condizionata dell'altro, purché il primo abbia avuto luogo.*

Esercizio:

La probabilità che nel caso dell'esercizio precedente, si abbiano in due estrazioni successive senza reimbussolamento, una pallina bianca ed una nera, ovvero $P(A \cap B)$ è data da $P(A) \cdot P(B/A) = 3/8 \cdot 5/7 = 15/56$ e la probabilità di avere bianche nella prima e nella seconda estrazione è data da $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) = 5/16$.

Formula di Bayes

La formula di Bayes può essere dedotta a partire dalla probabilità condizionata e precisamente ricordando le regole del prodotto per la probabilità composta:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) \text{ mentre } P(B \cap A) = P(B) \cdot P(A/B).$$

Ora, per la commutatività della intersezione $B \cap A = A \cap B$ e da ciò:

$$P(A) \cdot P(B/A) = P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B)$$

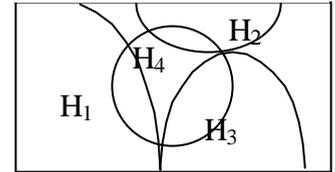
da ciò segue immediatamente che:

$$P(A/B) = \frac{P(A) \cdot P(B/A)}{P(B)}$$

Supponiamo, quindi, di avere una partizione finita dello spazio dei risultati Ω in un numero finito di possibili cause H_i con $i=1 \dots n$ incompatibili tra loro, $H_j \cap H_k = \emptyset$ e ciò per ogni j e k diversi compresi tra 1 ed n . Un qualunque evento A nello spazio Ω

($A \subset \Omega$) può porsi come $A = \bigcup_{i=1}^n A \cap H_i$ e naturalmente gli eventi

$A \cap H_i$ sono tutti incompatibili tra loro. Gli eventi H_i possono pensarsi come cause dell'evento A , che può quindi realizzarsi a causa del fatto che si è verificato il generico evento H_i .



Dalle regole della probabilità per eventi disgiunti si ha quindi:

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^n A \cap H_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A \cap H_i) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A/H_i)$$

che è nota come formula della *probabilità totale*.

Dalla formula di Bayes applicata al generico evento $H_i \cap A$ si ha:

$$P(H_i) \cdot P(A/H_i) = P(H_i \cap A) = P(A) \cdot P(H_i/A)$$

e quindi:

$$P(H_i) \cdot P(A/H_i) = P(A) \cdot P(H_i/A)$$

da cui:

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{P(A)}$$

Sostituendo a posto di $P(A)$ il risultato ottenuto con la formula della probabilità totale si ha:

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{\sum_j P(H_j) \cdot P(A/H_j)}$$

quindi $P(H_i/A)$ esprime la probabilità che sia l'evento H_i la causa del realizzarsi dell'evento A .

Esercizi

[1] 85 ragazzi decidono di prendere lezioni di guida dalla scuola guida A, mentre la scuola guida B ha solo 38 allievi.

Per contro però, la miglior preparazione offerta dalla scuola guida B garantisce una probabilità di promozione del 63% che per la scuola A scende al 48%

Indichiamo con $C_A \rightarrow$ lo studio effettuato nella scuola A;
 $C_B \rightarrow$ lo studio effettuato nella scuola B;
 $\Omega \rightarrow$ insieme delle scuole guida;
 $E \rightarrow$ alunno promosso.

Ora la causa di E sarà C_A per chi ha frequentato la scuola A e C_B per chi ha frequentato la scuola B, vogliamo calcolare $P(C_A/E)$ cioè che sia C_A la causa del verificarsi dell'evento E per il teorema di Bayes si ha allora:

$$P(C_A/E) = \frac{P(C_A) \cdot P(E/C_A)}{P(C_A) \cdot P(E/C_A) + P(C_B) \cdot P(E/C_B)} = 0,26$$

$P(C_A)$ = probabilità della causa A, nel nostro caso rappresenta la probabilità di aver studiato nella scuola A ed è quindi pari a $85/(38+85)=0,69$;

$P(C_B)$ = probabilità della causa B, nel nostro caso rappresenta la probabilità di aver studiato nella scuola B ed è quindi pari a $38/(38+85)=0,31$;

$P(E/C_A)$ = probabilità di passare l'esame a causa della frequenza nella scuola A, 0,48;

$P(E/C_B)$ = probabilità di passare l'esame a causa della frequenza nella scuola B, 0,63.

[2] In un negozio di componenti hardware per l'informatica una fornitura di 100 moduli RAM proviene da tre costruttori differenti, A, B, C, sappiamo che il 50% della fornitura viene dalla fabbrica A, l'altra metà è equamente ripartita tra le fabbriche B e C. I prodotti delle fabbriche hanno prezzi differenti, quelli della fabbrica A costano meno a discapito dei controlli di qualità, infatti il 5% dei moduli prodotti risulta difettoso, per la fabbrica B tale percentuale si riduce al 2% e i difetti si riducono al 1% per la fabbrica C. Calcolare la probabilità che comprando uno dei cento moduli del negozio questo risulti difettoso essendo stato prodotto da C.

Al solito indichiamo $E \rightarrow$ modulo difettoso, $C_A, C_B, C_C \rightarrow$ produzione rispettivamente dalle fabbriche A, B, C ed ancora $E/C_A \rightarrow$ modulo difettoso prodotto da A, e analogamente per B e C.

$$P(C_A)=0,5 \quad P(C_B)=0,25 \quad P(C_C)=0,25$$

$P(E/C_A)=5/100 \quad P(E/C_B)=2/100 \quad P(E/C_C)=1/100$ applicando quindi la formula

$$\text{di Bayes si ha } P(C_C/E) = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{100}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{100} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{100} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{100}} = 8\%$$

Descrittori della griglia di valutazione

<i>Descrittori</i>	<i>Punti</i>
Interpretazione dei dati	0-1
Individuazione e conoscenza delle formule necessarie alla risoluzione dei quesiti	0-1
Grado di sviluppo	0-2
Correttezza impostazione e linearità del procedimento	0-2
Correttezza nei calcoli	0-2
Autonomia e creatività	0-2
<i>Totale</i>	10

Fasce di livelli

0-3 gravemente insufficiente

4 insufficiente

5 mediocre

6 sufficiente

7 discreto

8 buono

9-10 ottimo

La Verifica dell'apprendimento

La verifica dell'apprendimento non deve essere un fatto isolato, eccezionale dell'attività scolastica. Gli alunni devono percepire le prove di verifica come momenti ordinari dell'attività scolastica che consentono di rilevare, a loro prima che ai docenti qual è la preparazione raggiunta e di acquisire consapevolezza in ordine al progredire dell'apprendimento.

La verifica deve essere percepita come un fatto quotidiano, altamente formativo poiché favorisce l'abitudine a studiare ogni giorno ed è indispensabile per accertare se c'è stato apprendimento.

La continua verifica dell'apprendimento è una esigenza sostanziale da cui scaturisce la possibilità di attribuire i voti quadrimestrali "in base ad un giudizio brevemente motivato, desunto da un congruo numero di interrogazioni e di esercizi scritti, grafici o pratici". [art. 79 R.D. 653/1925]

Oggetto della verifica è l'obiettivo che lo studente deve raggiungere, pertanto la misura attribuita alla prova di verifica scaturisce dal confronto:

PRESTAZIONE/OBIETTIVO DA RAGGIUNGERE

meglio sarebbe concludere ogni verifica con più misure: una per ciascun obiettivo, od un numero circoscritto di obiettivi, sottoposto ad esame, e ciò suppone che si sia realizzata un tassonomia degli obiettivi.

Strumenti di verifica

La verifica dell'apprendimento, formativa o sommativa che sia, può e deve essere effettuata utilizzando strumenti differenziati.

Prove non strutturate

Prove strutturate

Il docente deve individuare ed usare tutti gli strumenti di verifica, di volta in volta egli dovrà adottare lo strumento più adatto per verificare il raggiungimento dei vari obiettivi didattici.

La misurazione dell'apprendimento, realizzata attraverso i diversi strumenti, deve avere due caratteristiche:

- ***validità***
- ***oggettività***

Validità

La misurazione è valida se il suo oggetto, cioè quello che essa misura, è ciò che si deve misurare.

La validità è influenzata da:

- efficacia degli obiettivi perseguiti;
- l'esistenza di un collegamento tra gli obiettivi e l'oggetto della misurazione.

Oggettività

Una misurazione è oggettiva, o precisa, quando corrisponde alla realtà, essendo priva di errori. In generale ciò si realizza quando diverse persone correggono la stessa prova e pervengono al medesimo risultato. Le fonti di errore sono costituite dagli *attori* della misurazione: chi misura, lo strumento della misurazione, l'oggetto della misurazione. Le

occasioni sono costituite dalle operazioni che si compiono nelle varie fasi della misurazione: stimoli e loro somministrazione, registrazione, lettura.

Quindi gli attori sono:

- chi misura (chi)
- lo strumento che si sceglie per effettuare la misurazione (come, con che)
- l'oggetto da misurare (che cosa)

Per quanto riguarda lo stimolo esso deve essere il più possibile rappresentativo, omogeneo, non ambiguo, lineare nella sua formulazione e logicamente coerente con il tipo di performances che si vuole testare.

Naturalmente l'interpretazione soggettiva delle prove non strutturate diventa una delle prime cause di errori nella valutazione.

Prove non strutturate

Prove non strutturate sono temi, problemi (a soluzione non rapida), questionari, relazioni.

In genere hanno buona validità per la verifica di tutti gli obiettivi e si rivelano particolarmente adatte per quelli che coinvolgono abilità di *pensiero divergente*: analisi, sintesi, valutazione, in sostanza il pensiero creativo. Le prove scritte non strutturate però consentono una misurazione scarsamente precisa per la soggettività della loro lettura. La predisposizione delle griglie di correzione e misurazione rappresenta solo un parziale rimedio.

Prove strutturate

Sono strumenti che generalmente consentono di pervenire a misurazioni valide solo per alcuni obiettivi e si rivelano particolarmente adatte per misurare le abilità del pensiero convergente: conoscenza, comprensione. Esse sono delle prove altamente oggettive, non è possibile commettere errori se non di tipo tecnico nella fase di misurazione. Le prove chiuse (test vero/falso, test a scelta multipla, etc.) misurano la prestazione cognitiva degli allievi in modo da rendere minimi i margini di soggettività dei docenti nel giudicare gli esiti della prestazione, e costituiscono un puntuale ed efficace feedback per gli alunni ed l'insegnante stesso.

Esempi di prove strutturate sono:

1. completamento
2. vero/falso
3. scelte multiple
4. corrispondenze

Prove orali

Hanno buona validità per qualunque obiettivo e si rivelano particolarmente adatte per la verifica di quelli di ordine superiore, ovvero riconducibili alla attuazione di processi cognitivi propri del pensiero divergente.

Solo l'interazione che si instaura all'atto pratico del colloquio orale, consente di verificare il grado di analisi e valutazione di cui lo studente è capace, in quanto dalle risposte che riceve il docente è sollecitato a formulare ulteriori quesiti per approfondire, collegare, sviluppare le argomentazioni dell'alunno.

Le prove orali però sono scarsamente precise, quindi poco oggettive, e ciò essenzialmente per i seguenti principali problemi:

- mancanza di registrazione;
- effetto alone;
- effetto di contrasto;
- effetto di contaminazione;

- diverso grado di difficoltà;
- possibilità di fornire appigli;
- possibilità di formulare domande ambigue.

Metodi e tecniche d'insegnamento:

Innanzitutto, tenendo conto dei risultati ampiamente condivisi della moderna ricerca docimologia, si cercherà sempre di far rilevare che se è importante che *cosa si studia*, ancora più importante è *come si studia*; in questo contesto pertanto si afferma sempre più il predominio dell'aspetto formativo dei programmi di studio su quello semplicemente informativo, il primato dell'organizzazione della programmazione fondata sulla logica delle discipline e sulla psicologia dell'allievo che è collocato al centro del processo educativo.

Inoltre poiché l'insegnante, nell'ottica di un insegnamento razionale ed ottimale, ha la funzione di facilitare ed adattare l'insegnamento alle esigenze degli alunni, adoperando il più possibile un linguaggio essenziale e lineare si cercherà di adattare l'insegnamento alle caratteristiche dell'allievo e ciò in particolare con:

1. un'analisi particolare dei processi richiesti nell'esecuzione del compito
2. un'analisi dei processi seguiti dall'allievo
3. una eventuale riduzione delle difficoltà cognitive connesse con l'esecuzione del compito
4. il creare le condizioni ottimali affinché l'allievo interagisca positivamente e proficuamente con la situazione d'apprendimento.

Parimenti si cercherà di accrescere la disponibilità ad affrontare situazioni e problematiche educando ad un comportamento disponibile ad apprendere ed impegnarsi nelle attività di tipo cognitivo

Si cercherà di attrarre e controllare l'attenzione, scegliendo gli stimoli che possono favorire risposte costruttive da parte dell'allievo, inoltre si cercherà di informare sui risultati attesi mettendo al corrente l'allievo sui comportamenti che da esso si attendono in modo da consentirgli di individuare con maggiore facilità comportamenti corretti e metodi di studio efficaci ed efficienti.

Compito dell'insegnante sarà anche quello di fare da guida all'orientamento con suggerimenti, incoraggiamenti, indicazioni di lettura etc. ; all'insegnante è infatti affidato il compito di realizzare quelle condizioni di apprendimento ottimali che consentano all'allievo di affrontare con successo il processo formativo incrementando in lui il senso di consapevolezza ed adeguatezza nei diversi compiti, con tutte le implicazioni positive che ne derivano sul versante della promozione di atteggiamenti positivi nei confronti dell'apprendimento e su quello dell'autostima personale.

In ogni caso si cercherà di far capire all'alunno che commettere degli errori non significa fallire in modo irreversibile, l'errore non va drammatizzato, ma deve essere considerato come un *indizio* del proprio stato di preparazione, la valutazione deve servire per ricevere informazioni sui propri progressi e non per scoprire chi è più o meno abile, le forme di valutazione adottate saranno volte a favorire nell'allievo il confronto della propria prestazione rispetto ad un criterio di padronanza prestabilito, ed a evidenziare i progressi personali, piuttosto che il confronto con le prestazioni fornite da altri: i riconoscimenti del rendimento scolastico sono fondati sui miglioramenti personali in relazione ai progressi raggiunti rispetto ai criteri stabiliti: il termine di confronto non sono gli altri ma la prestazione trascorsa in relazione agli obiettivi prefissati a breve e lungo termine.

Allora appare chiaro che al di là di una generica promozione di un atteggiamento positivo nei confronti dello studio, è essenziale, sopra ogni altra cosa, una programmazione didattica in cui l'insegnante assicuri delle unità di apprendimento studiate ad hoc per finalizzare il conseguimento del "successo" e la percezione personale di adeguatezza da parte dell'allievo nei confronti dell'apprendimento, visto che tale dimensione psicologica ha un forte impatto sulle *performance* scolastiche e si correla in modo significativo con il successo nei compiti d'apprendimento.

In particolare gli aspetti specifici da prendere in considerazione potrebbero essere:

- a) suddividere le prestazioni finali che l'allievo deve manifestare in *abilità specifiche* ben chiare;
- b) definire le difficoltà dei singoli obiettivi dosandole in maniera adeguata: gli alunni dovrebbero essere portati a pensare che, mediante uno sforzo ragionevole, possano essere ottenuti dei risultati positivi;
- c) nel caso di attività che richiede *tempi di ultimazione lunghi*, questa deve essere suddivisa in unità di apprendimento e tempi di ultimazione *parziali*, dando allo studente la costante certezza che i risultati ottenuti sono propedeutici al raggiungimento degli obiettivi finali. Inoltre le proprie prestazioni verranno confrontate con uno *standard specifico*, rappresentato dall'abilità che dovrà essere appresa, evitando così di innescare un meccanismo di confronto dei propri risultati con quelli prodotti dagli altri, con tutte le spiacevoli conseguenze emotive che ne conseguono sul piano prosociale.

Recupero

Nella scuola dell'autonomia si dà una grande importanza al legame tra valutazione e recupero ed alle tematiche della didattica differenziata.

Peraltro l'abolizione degli esami di riparazione a settembre (1995) ha riportato il problema del recupero scolastico interamente all'interno dei confini dell'aula scolastica ed a carico della scuola. Anche i "tempi" del recupero sono cambiati, ed in effetti questa è una attività che si deve svolgere primariamente in aula parallelamente alla didattica ordinaria, per tutti e tutti i giorni (valenza *diacronica* del recupero formativo, da distinguere dal recupero sincronico prefissato alla fine di un definito percorso di apprendimento). L'attività di rinforzo-recupero può e deve dunque svolgersi parallelamente alla ordinaria attività didattica.

Le forme *diacroniche* di recupero previste dagli IDEI (interventi didattici educativi d'istituto) sono situazioni estreme, "anomale" che non devono diventare routine ordinaria ma forme "d'emergenza" di recupero da realizzarsi in un tempo scuola diverso da quello della normale attività didattica (e talvolta in un luogo diverso dall'aula).

Nella scuola dell'autonomia questa problematica porta a ridiscutere la nozione stessa di classe ed impone una attenzione molto più ampia di prima alle pratiche della didattica differenziata.

Questo è tutt'oggi un problema aperto, la cui soluzione è tutt'altro che consolidata. I momenti di recupero vanno dunque programmati, essi non devono essere occasionali, devono accompagnare le varie unità didattiche nello snodarsi dei contenuti trattati, essi possono essere indirizzati a tutto il gruppo classe come consolidamento delle conoscenze acquisite ed in modo differenziato alle esigenze dei discenti più bisognosi.

Nell'ottica di una attività di recupero razionale ed ottimale, si cercherà di adattare e facilitare l'apprendimento in relazione alle caratteristiche dell'allievo, in particolare ciò può realizzarsi con:

- un'analisi particolareggiata dei processi previsti per la realizzazione del compito;
- un'analisi dei processi seguiti dall'allievo;
- un'eventuale riduzione delle difficoltà cognitive connesse con l'esecuzione del compito;
- creare le condizioni ottimali affinché l'allievo interagisca positivamente e proficuamente con le situazioni di apprendimento.

In ogni caso è bene suddividere le prestazioni finali che l'allievo deve manifestare in modo ben chiaro; dosando le difficoltà suddividendo le attività in tempi di ultimazione parziali, quindi si può agire riducendo il livello di performance frazionandola e distillandone i momenti chiave ed agendo sui tempi di ultimazione.

Prof.ssa Stefania FIORINI
Prof. Nicola MONFORTE