

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/228430843>

La Rinascita Novecentesca della Probabilità

Article

READS

24

1 author:



Eugenio Regazzini

University of Pavia

69 PUBLICATIONS 947 CITATIONS

SEE PROFILE

La Rinascita Novecentesca della Probabilità ⁽¹⁾

di

Eugenio Regazzini

(Università degli Studi di Pavia)

eugenio.regazzini@unipv.it

1.- Nessuno potrà disconoscere che fra le nostre facoltà logiche quella che ci è più costantemente di aiuto consiste nel formulare congetture e nel ragionare sulle loro probabilità per prendere, infine, delle decisioni. Di qui la necessità di un insieme coerente di regole che indichino la via per ragionare e agire correttamente in tutte le situazioni in cui, per incompletezza d'informazione, non ci è consentito formulare predizioni (certe) del futuro. Tale complesso coerente di regole viene comunemente designato col termine di logica dell'incerto e riguarda tanto gli aspetti pratici della vita quotidiana quanto gli sviluppi della ricerca scientifica, indifferentemente.

Intorno al 1660, **Pascal** indicò nei suoi **Pensieri** come questa logica potesse ridursi al calcolo delle probabilità e ne diede, immediatamente, un'applicazione nel famoso pensiero **Infinito-nulla**. L'intuizione di Pascal guidò gli sviluppi del calcolo delle probabilità per un periodo sufficientemente lungo da includere la vita e l'opera di **Laplace** e, ovviamente, anche quella di **Bayes**, gli uomini di scienza ai quali si deve la formulazione di una proposizione fondamentale per ogni ragionamento svolto in condizioni d'incertezza: il ben noto **teorema di Bayes**. Ricordiamone il contenuto con un

Esempio. Subordinatamente all'ipotesi che θ sia la vera determinazione di una certa quantità da stimare, la legge di probabilità dei risultati di n osservazioni successive sia data da $p_n(dx_1, \dots, dx_n; \theta)$; a causa del fatto che la quantità da stimare è incognita, si accetti di riguardarla come quantità aleatoria, dotata di distribuzione iniziale $q(d\theta)$. Allora, la sua distribuzione finale risulta esprimibile, mediante il teorema di Bayes, come:

$$q_{x_1, \dots, x_n}(d\theta) = \frac{p_n(dx_1, \dots, dx_n; \theta)q(d\theta)}{\int p_n(dx_1, \dots, dx_n; \theta)q(d\theta)}$$

= probabilità che la quantità da stimare sia contenuta in $d\theta$, subordinatamente all'osservazione di n casi aventi risultato, rispettivamente, negli intervalli $dx_1, \dots, dx_n$.

Riguardo questo modo di procedere, dure critiche si appuntarono sul significato e la natura della distribuzione iniziale. Secondo Venn (1866), seguito da studiosi illustri come K. Pearson, R. A. Fisher, E. Pearson e J. Neyman, la difficoltà nell'applicabilità del teorema di Bayes risiede nel fatto che, a differenza di $p_n(\bullet; \theta)$, q non può generalmente essere interpretata come limite di una distribuzione di frequenze in una successione (potenzialmente infinita) di esperimenti ripetuti in condizioni analoghe e consistenti, nel caso in esame, di n osservazioni successive. Il secolo XX si apre, dunque, con un dubbio sulla natura della probabilità, con una decisa propensione per interpretazioni oggettivistiche e, segnatamente, frequentiste.

2.- Tali interpretazioni partono dall'idea che la probabilità di un evento è il valore attorno al quale si stabilizza la frequenza con cui quell'evento si presenta in un numero crescente di prove. Ad esempio, nel tratta-

¹ Conferenza tenuta a Roma l'11-06-2010 durante la XXIX Giornata della Misurazione.

to sulle probabilità uscito nel 1919, Guido Castelnuovo scriveva a proposito della cosiddetta legge empirica del caso:

“In una serie di prove ripetute un gran numero di volte nelle stesse condizioni, ciascuno degli eventi possibili si manifesta con una frequenza (relativa) che è presso a poco uguale alla sua probabilità. L'approssimazione cresce ordinariamente col crescere del numero delle prove.”

Altri si spingevano oltre, concependo la probabilità come frequenza-limite: ad es. Richard von Mises, in lavori apparsi a partire dal 1919. Nella concezione di questo matematico tedesco, formano oggetto del calcolo delle probabilità le successioni di prove, dette kollektiv, che soddisfano le seguenti condizioni:

(m_1) le frequenze con cui ciascuno dei risultati possibili si presenta nelle prime n prove, tendono a dei valori limite, detti frequenze-limite o probabilità, quando n cresce indefinitamente;

(m_2) tali frequenze-limite rimangono inalterate se, invece di considerare tutte le prove della successione primitiva, se ne estrae una qualunque sottosuccessione fissando comunque il rango dei termini da conservare (equivalentemente: nessun sistema di gioco può alterare alla lunga i risultati).

La condizione (m_2) è nota come assioma di non-regolarità.

Secondo von Mises, l'esistenza di successioni soddisfacenti (m_1) e (m_2) e l'interesse del loro studio sono dimostrati dall'esperienza, cogli stessi caratteri d'imprecisione o incertezza con cui sono in genere dimostrabili i presupposti sperimentali di una teoria matematica di fatti empirici. Compito del calcolo delle probabilità è lo studio delle conseguenze formali delle due condizioni della definizione. La teoria di von Mises fu sottoposta a critiche severe da almeno due differenti punti di vista: il primo, relativo alla sua sensatezza intrinseca, prende di mira il valore della condizione (m_2); il secondo riguarda l'aspetto concettuale e pratico della teoria. Della criticità della formulazione dell'assioma di non-regolarità si resero ben presto conto anche seguaci dell'impostazione di von Mises, come Kamke, Wald, Feller, Church, che cercarono di porvi rimedio in svariati modi e da ultimo lo stesso Kolmogorov che, però, abbandonò l'idea di frequenza-limite, preferendo un assetto più aderente all'effettiva realtà sperimentale. Riguardo ai tentativi di Wald, certamente riusciti dal punto di vista matematico, Fréchet si chiedeva se non fossero riusciti “à l'écraser” anziché “à la justifier”, il pronome essendo riferito all'esposizione originaria di von Mises. Le critiche sul piano concettuale e pratico riguardano crucialmente punti quali: la frequenza-limite e il teorema di Bernoulli; il problema della valutazione di una probabilità in relazione a quello della definizione in termini di frequenza-limite; il concetto di Kollektiv; la giustificazione del ragionamento induttivo.

L'interpretazione della legge (debole) dei grandi numeri di Bernoulli, seguente all'impostazione di von Mises, imporrebbe che si affermasse l'impossibilità pratica di scarti superiori ad ε fra probabilità e frequenza in un numero grande di prove. Per valutare la probabilità di un kollektiv in base ad osservazioni di frequenze su un numero finito di prove, de Finetti osserva che si deve ricorrere al senso usuale soggettivo della parola probabilità. Infatti si deve ritenere probabile (nel senso usuale!) che la frequenza-limite sia praticamente uguale alla frequenza osservata. Poi si devono eseguire i calcoli formali, dove anche eventuali ipotesi speciali sarebbero ammesse giudicandole probabili (nel senso usuale!) in base ad esperienza nel finito. Giunti ai risultati, per interpretarli, si rende necessario il passaggio inverso, giudicando probabili (nel senso usuale!) certe previsioni relative a un numero finito di prove. Per dare al concetto di probabilità un significato che vorrebbe essere concreto, ogni gruppo, necessariamente finito, di prove deve essere idealmente prolungato all'infinito per ragionare sulla frequenza-limite di cui si ammette l'esistenza. Ma quanto v'è d'arbitrario nell'assumere questa esistenza e, prima ancora, nel raggruppamento delle prove osservate e nel suo prolungamento in una successione infinita?

Riguardo al compito, storicamente assegnato al calcolo delle probabilità, di approfondire, spiegare o giustificare il ragionamento per induzione, von Mises nulla aggiunge perché esplicitamente premette alla teoria della probabilità, come fondamento delle stesse definizioni, i risultati di osservazioni empiriche; assume, in altri termini, che i fatti osservati contengano qualcosa da poter assumere in un certo senso come norma generale, come elemento stabile su cui costruire una teoria utilizzabile in futuro.

È evidente che lo scopo perseguito da von Mises, nel trasportare il ragionamento probabilistico in un campo di entità apparentemente fittizie, è quello di eliminare le entità soggettive che andrebbero necessariamente considerate, e prese sul serio affrontando direttamente la questione. Il ragionamento dovrebbe allora basarsi sulle peculiari leggi di tali entità soggettive, come ad es. vien fatto nell'impostazione di de Finetti che, in un certo senso, porta a compimento il punto di vista Pascal-Bayes-Laplace. Di tale impostazione si tratterà nell'ultima parte, dopo aver ricordato la teoria di Kolmogorov.

Segnalo che le precedenti osservazioni sul lavoro di von Mises sono sostanzialmente prese dall'articolo di de Finetti, citato in bibliografia, sull'opera del matematico tedesco.

3.- Al perdurare di questioni concettuali controverse si può opporre un atteggiamento tendente ad evitarle, prefiggendosi di fissare esplicitamente un sistema di proprietà formali da cui partire allo scopo di sviluppare organicamente e rigorosamente la trattazione. Ciò potrebbe servire, oltre che a costruire una teoria accessibile ad un matematico (disinteressato all'interpretazione dei risultati), a gettare una base per impostare più chiaramente la discussione sugli aspetti sostanziali controversi. Sono di questo tipo le impostazioni cosiddette **assiomatiche** di Francesco Paolo Cantelli (1932) e di Andrei N. Kolmogorov (1933). Per quest'ultimo, il calcolo delle probabilità è lo studio dei **campi di probabilità** (oggi comunemente designati col termine **spazi di probabilità**) così definiti:

(a) si considera all'inizio una classe Ω di enti primitivi detti **casi elementari**;

(b) gli insiemi di casi elementari, ossia i sottosistemi di Ω , si dicono **eventi**;

(c) si considerano una classe di eventi $\mathfrak{F}$ e una funzione non negativa e definita su $\mathfrak{F}$, soddisfacente i seguenti

(d) **Assiomi**:

(k₁) $\mathfrak{F}$ è un'algebra (contenente Ω e stabile per unione, intersezione e differenza);

(k₂) $P(\Omega) = 1$;

(k₃) se E_1, E_2 appartengono a $\mathfrak{F}$ e sono disgiunti, allora

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2);$$

(k₄) se $E_1 \supset E_2 \supset \dots \supset E_n \supset \dots$ sono elementi di $\mathfrak{F}$ tali che $\bigcap_{n \geq 1} E_n = \emptyset$, allora

$$P(E_n) \rightarrow 0 \quad (\text{per } n \rightarrow +\infty).$$

Finalmente, la probabilità condizionata $P(E|H)$ – essendo E ed H elementi di $\mathfrak{F}$ con $P(H) > 0$ – viene definita in base al **principio delle probabilità composte** ponendo

$$P(E|H) = \frac{P(E \cap H)}{P(H)}.$$

Nell'ambito degli assiomi enunciati, (k₄) equivale alla condizione detta dell'**additività completa**:

(k_4') se $A_1, A_2, \dots$ formano una successione di elementi di $\mathfrak{S}$, a due a due incompatibili, la cui unione è contenuta in $\mathfrak{S}$, allora

$$P\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = \sum_{n \geq 1} P(A_n).$$

Questa condizione interessa esclusivamente il caso in cui $\mathfrak{S}$ è una classe infinita di eventi. È interessante notare che essa può trovarsi in conflitto con la definizione di frequenza-limite (von Mises); più precisamente, la frequenza-limite non è necessariamente completamente additiva, come mostra il seguente **esempio** preso da de Finetti (1949): se i casi possibili ad ogni prova sono $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ e le loro frequenze dopo n prove sono

$$a_n^{(1)}/n, a_n^{(2)}/n, \dots, a_n^{(m)}/n, \dots$$

si avrà

$$a_n^{(1)}/n + a_n^{(2)}/n + \dots + a_n^{(m)}/n + \dots = 1$$

(somma di un numero finito, $\leq n$, di termini non nulli). Ne segue, analiticamente, che per le frequenze-limite ($a^{(1)}, a^{(2)}, \dots$) sia

$$a^{(1)} + a^{(2)} + \dots + a^{(m)} + \dots = 1;$$

potrebbero benissimo, ad es. essere tutte nulle:

$$a_n^{(m)}/n \rightarrow a^{(m)} = 0$$

come ad es. se ogni A_m si verificasse una sola volta (o un numero finito di volte) nel kollektiv.

Le ragioni del successo dell'impostazione di Kolmogorov, soprattutto all'interno della comunità matematica, sono da attribuire alle risposte relativamente semplici e trasparenti che, in virtù di essa, Kolmogorov riuscì a dare ad alcuni problemi fondamentali, fra i quali:

- 1) la costruzione effettiva di campi di probabilità, sia di dimensione finita sia di dimensione infinita;
- 2) una comoda definizione di distribuzione condizionale;
- 3) la determinazione degli elementi fondamentali per una costruzione sicura della teoria della convergenza in probabilità, forte o debole, di una successione di elementi aleatori.

Nel primo punto ricade, ad esempio, la costruzione di campi in $\mathfrak{R}^d$, con legge **univocamente** determinata da una assegnata funzione di ripartizione, ma soprattutto l'individuazione della legge di un **processo stocastico** a partire da un assegnato sistema (proiettivo) compatibile di **leggi di dimensione finita**.

Alla definizione richiamata in 2) si deve il merito, ad es., di aver costituito l'ambiente fecondo per lo sviluppo della teoria delle martingale.

Grazie all'interpretazione delle successioni di elementi aleatori come successioni di funzioni, dal 1933 l'esposizione e le ricerche sulle leggi dei grandi numeri hanno seguito vie nuove e certamente vantaggiose.

Di fronte ai pregi, testé sommariamente richiamati, l'impostazione di Kolmogorov non aiuta minimamente nell'interpretazione dei risultati, soprattutto nel momento in cui essi vengono applicati per risolvere problemi pratici. In tali circostanze si renderebbe necessaria un'impostazione che col rigore e con la generalità matematica coniugasse rigore concettuale tale da permettere interpretazioni corrette, esenti da equivoci, di conclusioni basate sulla probabilità.

4.- L'impostazione che de Finetti ideò e perfezionò tra la fine degli anni venti e l'inizio degli anni trenta costituisce uno dei tentativi più completi di far discendere un'intera teoria matematica della probabilità da una interpretazione del suo significato concreto (cfr. *Probabilismo* e *Sul significato soggettivo della probabilità*, entrambi del 1931). Anche l'approccio di de Finetti è assiomatico ma, a differenza di Kolmogorov, i cui

postulati riguarderanno direttamente la manipolazione algebrica della probabilità nelle situazioni più elementari, de Finetti prescrive un unico assioma caratterizzante le valutazioni non contraddittorie delle probabilità, intese come espressioni del giudizio di un dato individuo sulla verosimiglianza di una data classe di eventi. L'assioma in questione è noto come **principio di coerenza**. Seguendo trattazioni dello stesso de Finetti, si può enunciare questo principio con riferimento a numeri aleatori, vale a dire quantità la cui determinazione non riusciamo a predire, ma soltanto a prevedere secondo una legge di probabilità più o meno dettagliata.

Ci si riconduce, se richiesto, al caso degli eventi osservando che un evento si può riguardare come un numero aleatorio, per mezzo della sua funzione indicatrice, che assume il valore uno in corrispondenza al verificarsi dell'evento, e il valore zero se l'elemento non si verifica. Entriamo nello specifico.

Valutare la previsione di un numero aleatorio (n.a., d'ora in poi) significa assegnare un numero che valga a riassumere le determinazioni possibili del numero aleatorio, compatibilmente con la legge di probabilità che più o meno esplicitamente è loro attribuita (da un soggetto). Sia X una classe qualunque di n. a. **limitati**. Date una sottoclasse finita di X : $X_1, \dots, X_n$, e una n -upla di reali $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, esiste allora un numero c per cui

$$\inf(\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_n X_n) = c.$$

Il minimo che si possa richiedere ad una valutazione sintetica, $\wp$, su una classe di numeri aleatori, è che se ogni X_k viene sostituito con $\wp(X_k)$ continui a valere la disuguaglianza, cioè:

$$\lambda_1 \wp(X_1) + \dots + \lambda_n \wp(X_n) \geq c.$$

Ogni funzione su X che goda della suddetta proprietà comunque si scelgono $\{X_1, \dots, X_n\} \subset X$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ in $\mathfrak{R}$ si dice **previsione**.

L'esistenza di una previsione fu dimostrata da de Finetti nel 1949. Quando X coincide con una classe di indicatori di eventi, la cui classe indichiamo con $\mathcal{E}$, ogni previsione $\wp$ su X si traduce in una probabilità P su $\mathcal{E}$.

Se X è uno spazio lineare – rispetto alle usuali operazioni di addizione e di moltiplicazione per un numero reale – contenente i n.a. costanti, si dimostra che $\wp$ è una previsione su X se e solo se soddisfa:

- (d₁) $\inf X \leq \wp(X) \leq \sup X$ per ogni X in X , e
- (d₂) $\wp(\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_n X_n) = \lambda_1 \wp(X_1) + \dots + \lambda_n \wp(X_n)$.

In particolare, de Finetti (1931) dimostrò che se $\mathcal{E}$ è un'algebra di eventi, allora $P: \mathcal{E} \rightarrow \mathfrak{R}$ è una probabilità su $\mathcal{E}$ se e solo se è non negativa e vi soddisfa le condizioni:

- (d₃) $P(\Omega) = 1$,
- (d₄) per E_1, E_2 in $\mathcal{E}$, incompatibili (= disgiunti), $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$,

che sono le proprietà che corrispondono agli assiomi (k₂) e (k₃) di Kolmogorov.

Non sarà inutile ribadire che tali proprietà, nella concezione soggettivistica di de Finetti, si presentano come **condizioni necessarie** affinché le valutazioni non siano contraddittorie rispetto alle effettive sensazioni psicologiche dell'individuo che vi sia coinvolto. Non vi compare, invece, come condizione necessaria la proprietà (k₄) di continuità che, per inciso, si è visto non essere necessaria neppure nell'impostazione fondata sulla nozione di frequenza-limite.

Dal punto di vista strettamente matematico, nella precedente osservazione si enuclea l'unica differenza esistente fra la teoria di de Finetti e quella di Kolmogorov, limitatamente a probabilità assegnate in **campi di eventi** (algebre). In realtà, sempre dallo stesso punto di vista, esiste una differenza radicale consistente nel fatto che, mentre la definizione di probabilità di de Finetti vale per ogni classe di eventi, quella di Kolmogorov è limitata ai campi. Anzi, la definizione del primo vale in un dominio ancor più generale: quello dei n.a. limitati.

In quest'ultimo, Kolmogorov introduce il concetto di speranza matematica (**valore atteso**), in luogo della previsione di de Finetti, come integrale rispetto alla funzione di ripartizione del n.a. da valutare. È interessante notare che anche nell'impostazione di de Finetti, se è assegnata la funzione di ripartizione F del n.a. e se quest'ultimo è limitato, allora la previsione coincide, necessariamente, con l'integrale (di Stieltjes)

$$\int_{\mathfrak{R}} x dF(x)$$

essendo F la funzione di ripartizione.

La teoria di de Finetti contiene anche il necessario "prolungamento" ad enti aleatori subordinati.

5.- Concludiamo, ritornando al punto di partenza di questa lezione, con la ricostruzione del paradigma Pascal-Bayes-Laplace operata da de Finetti (1928, 1930, 1936) risultante dall'analisi dei rapporti fra la sua concezione soggettivista e quella frequentista. Non poteva infatti esimersi dal confrontare il proprio punto di vista radicalmente soggettivista con quello **classico** (del rapporto fra numero dei casi favorevoli e numero dei casi possibili), e con quello frequentista. Mostrare come il primo ricada nell'alveo soggettivista è operazione semplice: basta intenderlo come metodo di valutazione della probabilità in spazi **finiti** di casi elementari ritenuti (soggettivamente) **ugualmente probabili**. Più delicato è lo studio dei rapporti col punto di vista frequentista, e anche più ricco di implicazioni interessanti, che culminano nella celebre teoria delle successioni scambiabili. Vediamone i tratti essenziali.

Il sostrato delle concezioni frequentiste (e la ragione complessiva del loro successo) è di natura empirica e, precisamente, che si abbia a che fare con successioni di prove (esperimenti singoli) effettuabili in condizioni analoghe. Per una concezione che già disponga di una definizione generale di probabilità (come nel caso definettiano) svincolata dall'esistenza e dalle proprietà fissate assiomaticamente di tali successioni, si pone il problema di proporre un modello (probabilistico) per la situazione empirica di **analogia**. De Finetti avanzò (1928) a questo scopo il concetto di **scambiabilità**, che a sua insaputa era già stato presentato qualche anno prima da J. Haag: una successione di elementi aleatori $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ associati ai risultati di una successione di prove di un certo fenomeno, si dice **scambiabile** se la legge di probabilità che la governa resta inalterata quando si consideri la successione ottenuta dalla precedente mediante permutazione finita qualunque dei suoi elementi.

Non vi è dubbio che una siffatta definizione sia la più adatta a dare "veste probabilistica" all'idea empirica di analogia. Ma la questione più rilevante si presenta nei termini seguenti: data una successione scambiabile, è lecito ritenere che la distribuzione empirica dei risultati osservabili in un numero finito di prove rappresenti una stima della legge di probabilità di una generica osservazione futura? La liceità dovrà essere stabilita come teorema, non potrà cioè essere fissata apoditticamente sotto forma di qualche assioma che, a questo punto, risulterebbe necessariamente arbitrario.

Per rispondere, è utile fare riferimento a qualche risultato, non banale, la cui presentazione richiede venga introdotta la nozione di n -distribuzione empirica (= distribuzione di frequenze osservate)

$$E_n(A) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_{X_k}(A) \quad (A \subset S)$$

dove n è un qualunque intero positivo, δ_a la massa unitaria su a e S l'insieme dei valori possibili di ciascuna osservazione empirica. De Finetti (1936) dimostrò che, essendo d una distanza (della convergenza debole) nello spazio delle misure di probabilità su S , **esiste una misura di probabilità aleatoria $\mathcal{M}$ su S tale che**

$$(1) \quad d(\mathcal{M}, E_n) \rightarrow 0$$

con probabilità uno, al tendere di n all'infinito e che, inoltre, condizionatamente ad $\mathcal{M}$, i risultati del processo di osservazione $X_1, X_2, \dots$ riescono indipendenti e identicamente distribuiti, ciascuno con legge $\mathcal{M}$.

In altri termini, in un processo di osservazione scambiabile si viene a recuperare e, di fatto, ad estendere il paradigma esposto nell'esempio di pag. 1. Ciò che però emerge dalla ricostruzione di de Finetti è la necessità di tale paradigma riguardo al ragionamento induttivo. Ancor più espressivo è lo studio asintotico della legge di una qualunque osservazione X_{n+k} ($k = 1, 2, \dots$) subordinata alla rilevazione della distribuzione empirica $E_n(\bullet)$ quando n tende a crescere oltre ogni limite. Infatti, indicata con $\mathcal{L}_n(\bullet | E_n(\bullet))$ la distribuzione condizionata suddetta, si ha:

$$(2) \quad d(\mathcal{L}_n(\cdot | E_n(\cdot)), \mathcal{M}) \rightarrow 0$$

con probabilità uno, al divergere di n .

Le (1) – (2) forniscono la risposta al problema induttivo cercato nell'impostazione soggettivistica; infatti, da esse risulta che la distanza fra la previsione probabilistica di X_{n+k} , subordinata all'osservazione della distribuzione empirica E_n , e questa stessa, soddisfa

$$0 \leq d(\mathcal{L}_n(\cdot | E_n), E_n) \leq d(\mathcal{L}_n(\cdot | E_n), \mathcal{M}) + d(\mathcal{M}, E_n)$$

Poiché il membro di destra converge a zero con probabilità uno, si conclude che: in condizioni di scambiabilità la previsione e la frequenza sono vicine se il numero delle osservazioni è grande, e che l'approssimazione migliora al divergere di tale numero, almeno per un insieme di successioni di osservazioni che ha probabilità uno.

Bibliografia

A proposito di von Mises, cfr.:

von Mises, R. (1964). Mathematical theory of probability and statistics, New York.

de Finetti, B. (1937). Statistica e probabilità nella concezione di R. von Mises. Supplemento statistico ai Nuovi Problemi di politica, storia ed economia, 2, 5-15.

de Finetti, B. (1949). Sull'impostazione assiomatica del calcolo delle probabilità. Annali triestini dell'Univ. Di Trieste, 19, 29-81.

Su Kolmogorov, oltre al lavoro del 1949 di de Finetti, cfr.

Kolmogorov, A. N. (1933). Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Berlin.

Per de Finetti, oltre ai suoi lavori già citati, cfr.

de Finetti, B. (1931). Probabilismo. Saggio critico sulla teoria delle probabilità. Biblioteca di filosofia di A. Aliotta, 163-219.

de Finetti, B. (1931). Sul significato soggettivo della probabilità. Fund. Math., **17**, 298-329.

de Finetti, B. (1928). Funzione caratteristica di un fenomeno aleatorio. Atti Congr. Internaz. dei Matematici (Bologna, 3-10 sett. 1928). Cfr. anche Memore Acc. Lincei, **4**, 86-133.

de Finetti, B. (1937). La prévision, ses lois logiques, ses sources subjectives. Ann. Inst. H. Poincaré, **7**, 1-68.

Vedere anche Opere scelte di Bruno de Finetti (2006), 2 volumi nella collana dei Grandi Matematici Italiani, a cura dell'Unione Matematica Italiana, Cremonese.