

L'insegnamento del Calcolo delle Probabilità ed i quesiti agli Esami di Stato

Antonio Maturo¹

1. Introduzione

Il dibattito su cosa si deve intendere per “*Calcolo delle Probabilità*” e “*Teoria della Probabilità*” e cosa si deve insegnare nelle Scuole sull’argomento è ancora aperto. Dai “*Pensieri*” di Pascal del 1660 si è arrivati gradualmente alla “*Teoria analitica delle probabilità*” di Laplace del 1812. Le dispute sui fondamenti logici della *Probabilità* sono state e sono numerose. Con l’assiomatica di Kolmogoroff sembrava fosse stata data una sistemazione definitiva ai fondamenti matematici del *Calcolo delle Probabilità*. Invece, nel 1970, con il libro “*Teoria delle Probabilità*”, de Finetti mostra che le basi matematiche della probabilità possono essere completamente diverse e trova molti aspetti discutibili nell’impostazione di Kolmogoroff, sia da un punto di vista logico e sia dal punto di vista dell’interpretazione di certi fenomeni reali. Negli ultimi 30 anni, a livello di ricerca scientifica, la maggioranza ha continuato a seguire l’impostazione di Kolmogoroff ma un buon gruppo, soprattutto interessato allo studio delle *applicazioni della Matematica all’Economia*, ha preferito seguire le idee di de Finetti. Queste idee sono apparse sempre più interessanti negli ultimi tempi per la possibilità che offrono di svolgere i vari ragionamenti assegnando delle probabilità ad un *piccolo* numero di *eventi condizionati*. Ciò permette di inserire tali informazioni in un programma per computer e quindi di costruire dei software che simulano l’intelligenza umana. Recentemente vari autori hanno cercato di elaborare teorie “*di compromesso*” fra quella di Kolmogoroff e quella di de Finetti, accettando alcuni aspetti di una ed alcuni dell’altra. Il testo più diffuso in proposito è quello di Walley del 1991, [7].

Ma nell’insegnamento scolastico quale impostazione si segue o è opportuno seguire? Kolmogoroff, de Finetti o Walley oppure è meglio basarsi sulle più semplici *impostazione classica* o *impostazione statistica*?

La mia opinione è che ormai ci sono più tipi di *Calcolo delle Probabilità* così come ci sono più *Geometrie* e che ognuno di essi è più adatto per un approccio a certe problematiche e meno per altre. Vi è anche una vasta “*area comune*” e la *Probabilità* insegnata a scuola appartiene di solito a quest’area.

Prima di programmare l’insegnamento del *Calcolo delle Probabilità* bisogna anche tener conto dei programmi che vengono svolti per gli altri rami della matematica. La probabilità di Kolmogoroff è collegata ad una sufficiente trattazione della *Teoria della misura*, forse può essere adatta se nella didattica della *Geometria Euclidea* è approfondito quest’aspetto. La probabilità di de

¹ Università di Chieti-Pescara, Facoltà di Scienze Sociali, Via dei Vestini, Chieti, e-mail amatur@unich.it

Finetti è basata sugli *Spazi vettoriali* e la *Geometria affine* e quindi la sua trattazione è particolarmente consigliabile se nel corso degli studi viene approfondita l'*Algebra lineare*. Inoltre, poiché l'assiomatica di *de Finetti* è più debole di quella di *Kolmogoroff* c'è meno automatismo formale e più spazio per gli aspetti logici.

2. Commenti su alcuni quesiti proposti di recente nell'Esame di Stato²

Tema di matematica n 1 (PNI, a. s. 2000-2001- *Corso di ordinamento. Liceo scientifico*). Vengono assegnati due problemi ed un questionario di 10 quesiti. Il quesito n° 8 è l'unico di probabilità. Si chiede:

Una classe è composta da 12 ragazzi e 4 ragazze. Tra i sedici allievi se ne scelgono tre a caso: qual è la probabilità che essi siano tutti maschi?

Abilità attese: La risposta al quesito può evidenziare due tipi di abilità: l'uso del *calcolo combinatorio* oppure l'uso del concetto di *probabilità condizionata*.

(a) *Uso del calcolo combinatorio*. Si valuta che il numero n di casi favorevoli è il numero di combinazioni di classe 3 di 12 elementi mentre il numero N di casi possibili è quello delle combinazioni di classe 3 di 16 elementi. La probabilità p dell'evento che si considera è allora data dalla classica formula: $p = n/N$.

(b) *Uso della probabilità condizionata*. Si immagina di osservare, uno dopo l'altro, i tre allievi sorteggiati e, per $i \in \{1, 2, 3\}$ si considera l'evento $M_i = \text{"Lo studente dell'i-sima osservazione è maschio"}$. Allora l'evento di cui si chiede la probabilità è il prodotto logico $M_1 M_2 M_3$ e, per il *teorema della probabilità composta*,

$$p(M_1 M_2 M_3) = p(M_1) p(M_2/M_1) p(M_3/M_1 M_2) = 12/16 \cdot 11/15 \cdot 10/14. \quad (1)$$

Commento: L'esercizio proposto è molto elementare. Più che il risultato è interessante il procedimento logico seguito dall'allievo. Molti confondono il *calcolo delle probabilità* con il *calcolo combinatorio* e fino a quando si seguono solo procedimenti di tipo (a) ciò è giustificato. Il procedimento (b) presuppone una conoscenza sufficientemente approfondita di alcune questioni di base del Calcolo delle Probabilità. Infatti l'allievo deve:

- conoscere l'algebra degli eventi;
- saper formalizzare un evento con una formula di tale algebra;
- conoscere la probabilità condizionata ed il teorema della probabilità composta;
- preferire *de Finetti* a *Kolmogoroff*!!

Per quanto riguarda l'ultima affermazione è da notare che *Kolmogoroff* definisce la *probabilità condizionata* $p(A/B)$ come rapporto $p(AB)/p(B)$, e tale definizione

² Ringrazio la prof. *Tiziana Bindo* e l'ispettore *Emilio Ambrisi* per avermi fornito i testi dei quesiti proposti agli Esami di Stato.

ha senso solo se $p(B) \neq 0$. Quindi non considera un'esistenza autonoma di A/B e di $p(A/B)$. Ciò implica che $p(A/B)$ può essere calcolato solo a partire da $p(AB)$ e $p(B)$. Invece, nella (1), si dà per scontato che $p(M_2/M_1)$ e $p(M_3/M_1M_2)$ possono essere calcolati direttamente!

Tema di matematica n 2 (PNI, a. s. 2000-2001- *Sperimentazioni autonome. Liceo scientifico*). Anche in questo caso il tema di matematica è formato da due problemi ed un questionario di 10 quesiti.

Il quesito n° 9, unico di probabilità, chiede:

Tra 15 videogiochi di cui 5 sono difettosi se ne scelgono 3 a caso. Determinare la probabilità che:

- a) *nessuno dei tre sia difettoso;*
- b) *almeno uno dei tre sia non difettoso.*

Abilità attese: Rispetto al quesito del tema n° 1 si richiede una certa abilità logica. Infatti è necessaria una conoscenza, almeno a livello intuitivo, delle relazioni di *De Morgan* e la capacità di non lasciarsi confondere dalle negazioni. Conviene coniare la parola “buono” per indicare “non difettoso” e quindi tradurre “nessuno dei tre sia difettoso” in “tutti siano buoni”. Inoltre bisogna saper riconoscere che “almeno uno dei tre sia non difettoso” è l'evento contrario di “tutti sono difettosi”. Ossia, se Δ è l'insieme degli elementi difettosi si deve riconoscere l'equivalenza fra l'affermazione $\exists x: x \in \Delta$ e la negazione della $\forall x, x \in \Delta$. Tenuto conto di tali osservazioni i due esercizi del quesito possono essere svolti con i criteri del tema n° 1 ossia utilizzando il *calcolo combinatorio* o la *probabilità condizionata*.

Un'altra abilità che può essere evidenziata con la risposta al quesito è quella della costruzione e dell'uso dei *costituenti logici*.

Dati n eventi non impossibili $A_1, A_2, \dots, A_n$, i costituenti logici associati sono i prodotti logici $X_1X_2\dots X_n$, con X_i uguale all'evento A_i o al suo contrario A_i^c , tali che $X_1X_2\dots X_n \neq \emptyset$. Essi sono *a due a due incompatibili* e la loro unione è *l'evento certo*. In particolare la probabilità di un'unione di costituenti logici è la somma delle loro probabilità. Nel nostro caso se, per $i = 1, 2, 3$, indichiamo con B_i l'evento “*l'i-esimo videogioco osservato è buono*”, i costituenti associati a tali eventi sono 8. La risposta alla domanda (a) si riduce al calcolo della probabilità di $B_1B_2B_3$ e la risposta alla domanda (b) è $1 - p(B_1^c B_2^c B_3^c)$ oppure la somma delle probabilità dei costituenti logici diversi da $B_1^c B_2^c B_3^c$.

Commento: La capacità di effettuare l'analisi dei costituenti logici costituisce un'abilità fondamentale ed anche risolutiva. Ogni evento E ottenuto a partire da n eventi non impossibili $A_1, A_2, \dots, A_n$ con operazioni logiche di unione, intersezione, differenza è un'unione di loro costituenti logici ed il contrario di E è unione degli altri costituenti logici.

Inoltre, la relazione $p(E) = 1 - p(E^c)$ permette di valutare le probabilità da due punti di vista e quindi, uguagliando le espressioni ottenute, di ricavare formule notevoli. In particolare si ottengono con “*ragionamenti probabilistici*” la formula

del binomio di Newton, le sue generalizzazioni, il principio di inclusione-esclusione e vari altri risultati.

Le unioni dei costituenti logici associati agli eventi non impossibili $A_1, A_2, \dots, A_n$ formano un'algebra, precisamente l'algebra generata da $A_1, A_2, \dots, A_n$, ottenuta in maniera costruttiva a partire dagli eventi effettivamente considerati. Questo è un altro argomento a favore di *de Finetti* rispetto a *Kolmogoroff*.

Per quest'ultimo si deve assegnare a priori una σ -algebra probabilizzata, per *de Finetti*, invece, l'algebra è ottenuta a posteriori come generata dagli eventi $A_1, A_2, \dots, A_n$ che si considerano effettivamente.

L'assegnazione di probabilità $p(A_1), p(A_2), \dots, p(A_n)$ agli eventi $A_1, A_2, \dots, A_n$ viene effettuata con i criteri che appaiono più logici o più opportuni nel problema considerato, con l'unica limitazione che deve essere soddisfatta la *condizione di coerenza* che si riduce a poter assegnare un numero non negativo ad ogni costituente in modo tale che:

- la somma di tali numeri è uguale ad 1;
- per ogni $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, la somma dei numeri assegnati ai costituenti logici contenuti in A_i è uguale a $p(A_i)$.

Tema di matematica n 3 (PNI, a. s. 2000-2001- *Sperimentazioni autonome e progetti internazionali. Liceo scientifico*). Sono assegnati 10 quesiti, di cui il 9 ed il 10 di probabilità.

Quesito 9: *Dal sacchetto della tombola si estraggono 4 numeri a caso. Vedere il valore di verità dell'affermazione: <la probabilità che fra essi ci siano 1 e 90 è 2/90>.*

Quesito 10: *Due giocatori A e B giocano a testa e croce con la seguente regola: uno dei giocatori lancia e vince se viene testa, altrimenti il gioco passa all'altro, che vince se viene testa e così via. Calcolare la probabilità di A di vincere se inizia o inizia B.*

Abilità attese: Il quesito 9 presuppone la conoscenza della tombola. Anni fa, facendo lezione ad un gruppo multirazziale, mi sono accorto che ciò non è per niente scontato. Inoltre lo studente deve possedere la terminologia che si acquisisce con un breve corso di logica e la capacità di non farsi distrarre da una affermazione poco collegata al problema. La soluzione si ottiene abbastanza facilmente, con qualche accortezza logica, con il calcolo combinatorio.

Utilizzando le probabilità condizionate si può procedere come segue:

Si pone $A = \text{"fra i quattro numeri c'è 1"}$, $B = \text{"fra i quattro numeri c'è 90"}$ e si stabilisce che si deve calcolare la probabilità del prodotto logico AB .

Risulta allora:

$$p(AB) = p(A) p(B/A) = 4/90 \cdot 3/89,$$

risultato diverso da 2/90, per cui l'affermazione data è falsa.

Il quesito 10 presuppone o la conoscenza delle serie o una intuizione dello studente relativa a processi infiniti. Infatti se inizia il gioco A, la probabilità di A di vincere all'inizio o dopo un numero pari di lanci è sempre doppia della probabilità che vince B nel lancio successivo, per cui, se $p(A)$ e $p(B)$ sono,

rispettivamente, le probabilità di vincere di A e B, si può porre $p(A) = 2 p(B)$, ed essendo $p(A) + p(B) = 1$, segue $p(A) = 2/3$ e $p(B) = 1/3$.

Il quesito si può risolvere con più precisione e meno intuito se si conoscono le serie e si valuta che la probabilità che la partita si conclude al lancio n -simo è $1/2^n$. Se inizia A si ottiene che egli vince se la partita si conclude ad un lancio dispari. Calcolando la somma dei numeri $1/2^n$ con n dispari si ottiene $p(A) = 2/3$. Analogamente, sommando i numeri $1/2^n$ con n pari, si vede che $p(B) = 1/3$.

Commento: Il quesito 9 presuppone la capacità dello studente di concentrazione e di non farsi sviare da elementi estranei. Un po' di problemi può creare il concetto di “*valore di verità*”: si vuole un valore numerico (0 oppure 1) oppure qualitativo (vero o falso)? E se lo studente conosce le logiche fuzzy potrebbe essere indotto a chiedersi se si può dare un valore intermedio.

Nel quesito 10 si considera una partizione dell'evento certo in una infinità numerabile di eventi $E_n = \text{“la partita si conclude al lancio } n\text{-simo”}$, $n \in \mathbb{N}$ e si calcolano le $p(A)$ e $p(B)$ utilizzando somme di serie. Ciò sembrerebbe essere a favore dell'impostazione di *Kolmogoroff* che richiede la σ -additività. Tuttavia non è in contraddizione con l'impostazione di *de Finetti*, che non esclude le distribuzioni di probabilità σ -additive pur ritenendo che la σ -additività non debba essere richiesta per ogni distribuzione di probabilità.

3. Considerazioni finali

Esaminando altri recenti temi di matematica spesso i quesiti di probabilità sono assenti, a volte sono del livello di quello del tema n 1 con qualche quesito atto a verificare l'abilità nel maneggiare concetti logici elementari, con l'uso di locuzioni come “*al più*”, “*almeno*” e di esprimere il “*valore di verità*” di alcune affermazioni.

Nelle “*sessioni suppletive*” i quesiti di probabilità, se presenti, sono spesso di tipo teorico, ad esempio sulla *legge dei grandi numeri* o sulla *legge di Gauss*.

In un caso la soluzione è legata ad una applicazione elementare del *teorema di Bayes*.

In varie maturità sperimentali relative a scuole in cui è stato svolto un programma di probabilità e statistica “avanzato” i quesiti sono piuttosto tecnici e si “appoggiano” sostanzialmente sull'applicazione di risultati relativi ad una distribuzione classica, come quella *binomiale*, *normale* o di *Poisson*. In altri casi si chiede il calcolo di *indici statistici* a partire da tabelle di dati. In tutti questi quesiti si è superata la *fase della scoperta*, dell'*intuizione* e dello sforzo di *comprensione logica* e gli studenti si trovano nella fase più tranquilla di applicare, anche con un certo *automatismo*, le procedure apprese.

Le abilità attese sono evidentemente:

- saper riconoscere che certe situazioni reali si possono studiare per mezzo dei modelli probabilistici descritti dalle distribuzioni di probabilità studiate;

- capacità di maneggiare tali distribuzioni.

Un tema che esce da questi schemi e che riteniamo opportuno citare per la sua diversità è il seguente, di 10 anni fa, e che forse, per il suo argomentare di giudici ed imputati, si ispira al classico “problema dei 3 prigionieri” (cfr. [6]).

Un quesito di tipo giuridico affrontato con metodi algebrici e probabilistici

(Maturità sperimentale PNI. Sessione ordinaria, a.s. 1992-1993)

Un imputato innocente deve essere giudicato da una giuria composta da tre giurati il cui verdetto finale è raggiunto a maggioranza. I tre giurati A, B e C assumono la loro decisione indipendentemente. A e B hanno probabilità $p \in (0, 1)$ di decidere per l'assoluzione, mentre il giurato C decide in base al risultato ottenuto nel lancio di una moneta.

- Si calcoli la probabilità che l'imputato sia assolto,*
- Supponendo di sostituire il giurato C con un altro giurato D che ha probabilità $p' \neq p$, $p' \in (0, 1)$, di decidere per l'assoluzione, si verifichi che la probabilità di assoluzione per l'imputato è maggiore che nel caso precedente se e solo se $p' > 1/2$.*
- Qualora gli imputati siano tre e siano giudicati indipendentemente tra di loro dalle giurie prima considerate, si esprima la probabilità dei seguenti eventi:*

$E_1 = \langle \text{la giuria composta da A, B e C ne assolve due su tre} \rangle;$

$E_2 = \langle \text{la giuria composta da A, B e D ne assolve due su tre} \rangle;$

$E_3 = \langle \text{la giuria composta da A, B e D assolve almeno un imputato} \rangle.$

In particolare per $p = 3/4$ si determini il valore di p' (probabilità che il giurato D decida per l'assoluzione) in modo tale che $p(E_1) = p(E_2)$.

Abilità attese: Indichiamo con A l'evento “A assolve l'imputato”, e attribuiamo analogo significato agli eventi B, C, D. Considerando i costituenti logici associati agli eventi A, B, C si vede che l'evento $E = \text{“l'imputato è assolto da A, B, C”}$ è somma logica dei costituenti ABC, ABC^c, A^cBC, AB^cC e, applicando i teoremi della probabilità composta e totale si ottiene $p(E) = p$. Lo studente può mostrare abilità nel calcolare la somma logica dei costituenti osservando che la somma dei primi due costituenti è AB e che gli altri due sono equiprobabili. Lo stesso risultato si può ottenere in più modi sapendo interpretare i diagrammi di Venn.

Analogamente si vede che l'evento $F = \text{“l'imputato è assolto da A, B, D”}$ ha probabilità $p(F) = p^2 + 2pp'(1-p)$. Quindi la risposta alla seconda parte della domanda (b) si ottiene considerando la disequazione:

$$p^2 + 2pp'(1-p) > p. \quad (2)$$

Sfruttando il fatto che $p \in (0, 1)$ si vede che essa è soddisfatta se e solo se $p' > 1/2$. La domanda (c) richiede la conoscenza della distribuzione binomiale di parametri α e 3. Infatti, indicato con α la probabilità di una assoluzione, la probabilità di due assoluzioni su tre è $p_{2,3} = 3\alpha^2(1-\alpha)$ e quella di almeno una assoluzione è $1 - p_{0,3} = 1 - (1-\alpha)^3$.

Si ha $p(E_1) = p_{2,3}$, con $\alpha = p$, inoltre $p(E_2) = p_{2,3}$, con $\alpha = p^2 + 2pp'(1-p)$.

Analogamente $p(E_3) = 1 - (1 - \alpha)^3$, con $\alpha = p^2 + 2pp'(1-p)$.

Per una trattazione completa dell'equazione $p(E_1) = p(E_2)$, dipendente dal parametro p , è necessaria una buona abilità nel calcolo algebrico.

Intanto si può osservare che, $\forall p \in (0, 1)$, l'equazione in p' :

$$p^2 + 2pp'(1-p) = p \quad (3)$$

ha l'unica soluzione $p' = 1/2$.

Allora, posto $\alpha = p^2 + 2pp'(1-p)$, per $0 < p < 1$, l'equazione $p(E_2) = p(E_1)$, nell'incognita p' , ossia la:

$$3\alpha^2(1-\alpha) = 3p^2(1-p) \quad (4)$$

è anch'essa soddisfatta per $p' = 1/2$ e $0 < p < 1$. Si tratta di vedere se essa ha anche altre soluzioni.

Dividendo l'equazione (4) per $\alpha - p$, le altre eventuali soluzioni si ottengono dalla:

$$\alpha^2 + \alpha(p-1) + p(p-1) = 0. \quad (5)$$

Per $p = 3/4$, essendo $\alpha > 0$, risulta $\alpha = 3/4 = p$. Allora vale la (3) e quindi si ottiene di nuovo la soluzione $p' = 1/2$.

Commento: L'esercizio è di tipo interdisciplinare, relativamente all'area logico-matematica. Si tratta di saper maneggiare bene alcuni concetti fondamentali di probabilità e saper lavorare con abilità nell'ambito delle equazioni algebriche riuscendo ad evitare la trappola di calcoli laboriosi.

Si potrebbe osservare che in un problema reale, in cui si deve interpretare una situazione, la probabilità p dovrebbe essere un punto di arrivo, una valutazione. Ma per ottenere ciò dovrebbe essere introdotta nei programmi scolastici la probabilità soggettiva.

Conclusioni: Dai quesiti esaminati si desume che il ruolo attribuito al *Calcolo delle Probabilità* per stabilire la maturità degli allievi è molto variabile. Si passa da temi di matematica in cui tale disciplina è assente a temi in cui si richiedono conoscenze piuttosto tecniche. Escludendo quest'ultimo caso le abilità che possono emergere dai vari quesiti sono spesso indipendenti dal risultato mentre dipendono dal ragionamento svolto. Ciò può creare problemi di valutazione non trascurabili, data l'abitudine dei nostri studenti a pensare solo al risultato.

In genere lo svolgimento di un esercizio non banale di *Calcolo delle Probabilità* richiede conoscenze e abilità nel maneggiare concetti di logica e competenze interdisciplinari in vari rami della matematica, potendo avere approcci algebrici, geometrici, logici di vario genere. Inoltre è importante imparare a vedere la *Probabilità* come disciplina per interpretare, in maniera razionale ma non univoca, le situazioni reali in cui è presente l'incertezza. Per questo scopo è necessario individuare esercizi non ad un'unica soluzione, che prevedano la possibilità di introdurre criteri o anche algoritmi per trarre delle informazioni "utili" dai dati reali.

Si propone di prendere in considerazione la possibilità di introdurre relazioni di "preordine" fra eventi e *probabilità qualitative* che precedano assegnazioni di probabilità coerente (cfr. [5]).

Dovrebbero essere studiati i fondamenti di più impostazioni del *Calcolo delle Probabilità* per capire le logiche e le possibili applicazioni di ciascuna.

Un ruolo maggiore dovrebbe essere assegnato alle applicazioni del *Teorema di Bayes*. Infine è importante saper confrontare il *Calcolo delle Probabilità* con le altre teorie che si occupano del trattamento di situazioni di incertezza, come quella dei *Fuzzy Set*, cercando di inserire nei programmi anche l'idea di logiche a più valori.

Bibliografia

- [1] B. de Finetti, (1970), *Teoria delle Probabilità*, vol. I e II, Einaudi, Torino.
- [2] G. Coletti, R. Scozzafava, (2002), *Probabilistic logic in a coherent setting*, Kluwer Academic Publishers, London.
- [3] L. Crisma, (2003), *Elementi di matematica dell'incertezza*, Edizioni Goliardiche, Udine.
- [4] R. Scozzafava, (1989), *La probabilità soggettiva e le sue applicazioni*, Masson, Milano
- [5] A. Maturo, (1992), *Una introduzione alla probabilità soggettiva*, Periodico di matematiche, Serie VI, Vol 3, 3, 19-36
- [6] A. Maturo, (1994), *Sul problema probabilistico dei tre prigionieri*, Periodico di matematiche, Serie VII, Vol 1, 1, 15-20
- [7] P. Walley, (1991), *Statistical Reasoning with Imprecise Probabilities*, Chapman and Hall, London