CORSO ELEMENTARE SULLA PROBABILITA'

Esperimento aleatorio: ogni fenomeno del mondo reale il cui svolgimento è accompagnato da un certo grado di incertezza.

prova (tentativo) = singola esecuzione di un ben determinato esperimento aleatorio

Ogni prova si conclude con un **esito** (**risultato**, **caso**).

L'insieme costituito da tutti i possibili esiti di un dato esperimento = **spazio campionario** (**S**) dell'esperimento.

Esempio 1:

- lancio di una moneta → ***S*** = {T,C}
- lancio di un dado → ***S*** = {1,2,3,4,5,6}
- estrazione di un numero da un'urna contenente i numeri dall'1 al 10 → ***S*** = {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}

Evento: un qualunque insieme di esiti (casi) possibili = ogni sottoinsieme dello spazio campionario ***S***

Esempio 2: nel lancio di un dado si possono avere, tra gli altri, i seguenti eventi:

A : "si presenta un numero pari" → ***A*** = {2,4,6};
B : "si presenta un numero dispari" → ***B*** = {1,3,5};
C : "si presenta un numero minore di 3" → ***C*** = {1,2};
D : "si presenta un numero minore di 7" → ***D*** = ***S***;
E : "si presenta un numero maggiore di 6" → ***E*** = Ø

Evento elementare: sottoinsieme di ***S*** con un solo elemento → evento elementare = caso.

Evento **certo:** se coincide con ***S*** (es. *D*).
Evento ***impossibile***: se è l'insieme vuoto (es. *E*).

A ciascun evento può essere assegnata una **misura di probabilità**.

Se A è un evento impossibile, allora $p(A) = 0$;
se A è un evento certo, allora $p(A) = 1$.

E' chiaro allora che, rappresentando l'evento impossibile e quello certo le due situazioni limite, per un qualunque evento si avrà:

$$0 \le p(A) \le 1$$

Definizione **classica** della probabilità

In generale, se tutti i risultati di un dato esperimento sono equiprobabili, la probabilità di un evento *A* è

$$p(A) = \text{numero degli esiti favorevoli ad } A \;/\; \text{numero degli esiti possibili} \qquad (1)$$

Esempio 3. Riprendiamo l'esempio del lancio di un dado; se il dado è costruito in modo regolare, allora tutti i casi sono equiprobabili, e le probabilità degli eventi sopra indicati sono:

$p(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; $p(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; $p(C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$;

$p(D) = \frac{6}{6} = 1$ (*D*: evento certo); $p(E) = \frac{0}{6} = 0$ (*E*: evento impossibile).

Problema 1. Calcolare la probabilità di vincita di un terno al lotto, puntando una volta, su una sola ruota ("terno secco").

In questo esperimento il numero dei casi possibili è costituito da tutte le possibili "cinquine" che si possono estrarre, ossia da tutti i gruppi distinti che si possono formare con 90 oggetti distinti prendendone 5 per volta, <u>senza</u> interessarsi all'ordine, cioè dalle combinazioni di 90 oggetti di classe 5: $C_{90,5} = \binom{90}{5} = \frac{90!}{5!\cdot 85!}$.

Il numero dei casi favorevoli all'evento *A*: "vincita di un terno al lotto" è dato dal numero delle cinquine che contengono quel terno prefissato su cui si è puntato, ossia dalle combinazioni degli 87 numeri rimanenti, presi 2 per volta: $C_{87,2} = \binom{87}{2} = \frac{87!}{2!\cdot 85!}$.

Chiaramente, dobbiamo supporre che tutti gli esiti sono equiprobabili. Allora la probabilità della vincita è

$$p(A) = \frac{C_{87,2}}{C_{90,5}} = \frac{\binom{87}{2}}{\binom{90}{5}} = \frac{87!}{2!\cdot 85!} \cdot \frac{5!\cdot 85!}{90!} = \frac{3\cdot 4\cdot 5}{90\cdot 89\cdot 88} = \frac{1}{11748} = 0.000085$$

Problema 2. Un'urna contiene i numeri da 1 a 20. Si estraggono, in successione, due numeri. Determinare la probabilità dei seguenti eventi:

A: "estrazione, nell'ordine, di 4 e 12";

B: "estrazione di due numeri entrambi pari";

C: ""estrazione di due numeri entrambi dispari";

D: "estrazione di due numeri entrambi pari o entrambi dispari";

Il numero dei casi possibili è dato dal numero di file <u>ordinate</u> che si possono formare con 20 oggetti distinti prendendone 2 per volta, <u>senza</u> ripetizioni, cioè dalle disposizioni semplici di 20 oggetti di classe 2: $D_{20,2} = 20\cdot 19 = 380$.

Per quanto riguarda l'evento *A*, c'è un solo caso ad esso favorevole: escono, nell'ordine, proprio 4 e 12.

Pertanto: $p(A) = \frac{1}{D_{20,2}} = \frac{1}{380} = 0.00263$.

Per quanto riguarda i casi favorevoli all'evento *B*, bisogna notare che i numeri pari presenti nell'urna sono 10, e allora i casi favorevoli sono dati dalle disposizioni semplici di 10 oggetti di classe 2: $D_{10,2} = 10 \cdot 9 = 90$.
Anche in questo caso stiamo supponendo che tutti gli esiti sono equiprobabili. Pertanto:

$$p(B) = \frac{D_{10,2}}{D_{20,2}} = \frac{10 \cdot 9}{20 \cdot 19} = \frac{9}{38} = 0.2368.$$

Chiaramente, in modo del tutto analogo si ha:

$$p(C) = \frac{D_{10,2}}{D_{20,2}} = \frac{10 \cdot 9}{20 \cdot 19} = \frac{9}{38} = 0.2368$$

Quando consideriamo l'evento *D*, dobbiamo tener conto che esso è verificato sia dai casi che soddisfano *B* sia dai casi che soddisfano *C*, cosicché il numero di eventi favorevoli all'evento *D* è pari a $D_{10,2} + D_{10,2}$ e, pertanto,

$$p(D) = \frac{D_{10,2} + D_{10,2}}{D_{20,2}} = \frac{10 \cdot 9 + 10 \cdot 9}{20 \cdot 19} = \frac{9}{19} = 0.4737.$$

In altre parole, è come se avessimo fatto:
$p(D) = p(B) + p(C)$
poiché

a) l'evento *D* si può considerare come l'"<u>unione</u>" degli eventi *B* e *C*, (cioè $D = B \cup C$);

e, inoltre, cosa importantissima,

b) i due eventi *B* e *C* <u>non hanno</u> casi in comuni, cioè sono eventi <u>incompatibili</u> ($B \cap C = 0$).

Diamo allora la <u>definizione</u> di **eventi incompatibili**: due eventi *A* e *B* sono incompatibili se non esistono esiti che li soddisfino entrambi contemporaneamente.

Se *A* e *B* sono incompatibili allora
$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ (**Teorema della somma**)
<u>Attenzione</u>: se i due eventi non sono incompatibili il teorema non è più valido, in quanto la probabilità degli esiti favorevoli ad entrambi sarebbe contata due volte.

Infatti, consideriamo la seguente situazione:
Problema n 3
Da un'urna contenente 30 palline numerate da 1 a 30 si estrae una pallina. Calcolare la probabilità di estrarre un numero maggiore di 20 o dispari.
Possiamo definire i due eventi:
A: "si estrae un numero maggiore di 20;
B: "si estrae un numero dispari.

Chiaramente $p(A)=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$ e $p(B)=\frac{15}{30}=\frac{2}{3}$

Se applicassimo il teorema della somma a questi due eventi otterremmo che la probabilità cercata è pari a $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$, cioè 100%, che è un risultato chiaramente errato!

Infatti, non abbiamo tenuto conto che nell'evento A sono contenuti casi appartenenti anche all'evento B (i numeri dispari maggiori di 20), e sommando semplicemente le due probabilità abbiamo contato questi casi **due volte**. In altre parole i due eventi A e B sono compatibili; la loro intersezione è l'insieme

$A \cap B = \{21,23,25,27,29\}$ e $p(A)=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$

e la probabilità richiesta va calcolata facendo:

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ (**Teorema della probabilità totale**)

cioè

$$p(A \cup B) = \frac{1}{3}+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}=\frac{2}{3} \approx 67\%$$

Problema n. 4 . Un'urna contiene i numeri da 1 a 10. Estraiamo (in modo non ordinato) 4 numeri. Qual è la probabilità che almeno uno di essi sia pari?

Poiché non conta l'ordine, gli esiti possibili sono $\binom{10}{4}=210$.

Per contare i casi favorevoli all'evento *A*: "almeno un numero è pari", dovremmo prima contare le quaterne con esattamente un numero pari, poi quelle con esattamente due numeri pari e così via. Possiamo invece, molto più rapidamente, considerare l'evento "contrario" ad *A*, cioè l'evento A^c:"i quattro numeri sono dispari". Infatti, se non si verifica che "almeno un numero sia pari", ciò significa che i numeri sono tutti dispari. I casi favorevoli ad A^c sono $\binom{5}{4}=5$; tutti gli altri casi sono favorevoli ad *A*. Allora

$$p(A)=\frac{210-5}{210}=1-\frac{5}{210}=1-p(A^c)$$

In generale, diciamo che l'evento A^c, **contrario** (o **complementare**) di *A*, è quell'evento che è verificato quando non è verificato *A*. E possiamo scrivere che:

$p(A)=1-p(A^c)$ (**Teorema dell'evento complementare**)

Attenzione: un evento e il suo complementare sono incompatibili, ma non è detto che due eventi incompatibili siano l'uno il complementare dell'altro. Ad esempio, considerando l'estrazione di 2 numeri da un'urna di 10 numeri, gli eventi *A*:"la somma dei due numeri estratti è 7" e *B*:"la somma dei due numeri estratti è 8" sono incompatibili, non essendovi alcun esito che li soddisfi entrambi, ma non sono complementari, essendovi degli esiti che non soddisfano né l'uno né l'altro. La probabilità che si verifichi *A* ***o*** *B* è

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) = \frac{3}{45} + \frac{3}{45} = 0.1\overline{3}$$

Infatti gli esiti possibili sono $\binom{10}{2} = 45$; gli esiti favorevoli ad *A* sono tre: {1,7}, {2,6}, {3,5}, e gli esiti favorevoli a *B* sono tre: {1,6}, {2,5}, {3,4}.

Esercizio 1. Qual è la probabilità di ottenere coma somma 12 lanciando due dadi perfettamente bilanciati? E la probabilità di ottenere 11? E la probabilità di ottenere 7? [1/36; 1/18; 1/6]

Esercizio 2. In un'urna vi sono 3 palline rosse, 2 bianche e 1 nera. Si estraggono due palline. Determinare la probabilità che siano dello stesso colore. [1/4]

Esercizio 3. Si estraggono quattro carte da un mazzo di 40 carte. Determinare le probabilità dei seguenti eventi:

A: ”le quattro carte sono dello stesso seme”;

B: ”le quattro carte sono di ugual valore (quattro assi, o quattro re, ecc.)” $\left[\frac{84}{9139}; \frac{1}{9139}\right]$

Definizione **frequentistica** della probabilità

Riprendiamo in esame la definizione calssica di probabilità: essa è applicabile soltanto a quegli esperimenti aleatori i cui esiti sono tutti egualmente probabili. A parte il problema logico che questa definizione presenta una evidente tautologia, esistono situazioni in cui non è possibile stabilire "a priori" qual è la probabilità dei singoli risultati.
Supponiamo, per esempio, di lanciare un dado non regolare. In questo caso nessuno si azzardarebbe ad attribuire eguale probabilità a ciascun esito. Supponiamo che dopo una indagine consistente in un elevato numero di lanci si venga a formare la seuente tabella di frequenze relative:

E:	1	2	3	4	5	6
$f(E)$	14%	16%	20%	25%	12%	13%

Allora è ragionevole attribuire a ciascun esito una probabilità (da realizzarsi in futuro) pari alla frequenza (con cui si è verificato in passato). Possiamo quindi attribuire agli esiti di questo spazio le seguenti probabilità

E:	1	2	3	4	5	6
$p(E)$	0.14	0.16	0.20	0.25	0.12	0.13

Analogamente si procede quando, in campo medico, si vuole stabilire la probabilità che una certa terapia, somministrata ad un certo tipo di paziente, porti alla guarigione del paziente. La frequenza relativa con cui si è verificata la guarigione in seguito della somministrazione della terapia nel passato diventa la probabilità di guarigione nel futuro. Chiaramente, maggiore è il numero pazienti trattati precedentemente, maggiore è la confidenza che il valore della frequenza relativa ottenuta sia una buona rappresentazione del valore della probabilità prevista.
Queste considerazioni poggiano sulla seguente osservazione empirica: se si prende un dado regolare, e lo si lancia più e più volte, la frequenza relativa con cui si presenta ciascuna delle sei facce risulta avvicinarsi sempre di più al valore della sua probabilità aspettata teoricamente, cioè 16.67 = 1/6. Ugualmente, nel lancio di una moneta regolare, si osserva sperimentalmente che la frequenza relativa di ciascuna faccia si avvicina sempre più al valore 0.50, quanto più grande diviene il numero di lanci effettuati. Analogamente accade per ogni altro esperimento aleatorio per cui è possibile stabilire la probabilità a priori dei suoi esiti.
Tutto ciò è riassunto nella seguente legge:

Legge dei grandi numeri (o **legge empirica del caso**)
In un grande numero di prove, tutte ripetute nelle stesse condizioni, la frequenza relativa di un evento tende ad essere uguale alla sua probabilità teorica.

$$\lim_{n\to\infty} f(E) = p(E)$$

La corretta interpretazione della legge dei grandi numeri richiede qualche osservazione.
Supponiamo di aver lanciato in aria una moneta, perfettamente regolare, per 100 volte e che si siano ottenute 61 Teste (*T*) e 39 Croci (*C*).
Domandiamoci: qual è la probabilità che al lancio successivo esca *C*?
Una interpretazione, forse istintiva, della legge dei grandi numeri potrebbe indurci a pensare che, poiché le due frequenze relative, all'aumentare del numero di lanci, devono diventare uguali a 0.5, l'uscita di *C*, che è "in ritardo" rispetto a *T*, sia avvantaggiata. Ma questa interpretazione non tiene conto che ogni singolo lancio è una prova a sé stante, indipendente dal lancio precedente così come da quello successivo. In altre parole, il dado non "ha memoria". Proprio perché i due risultati sono equiprobabili, a lungo andare le frequenze relative tendono ad assumere il valore 0.5, ma questo non significa che, se tra il 51-esimo e il 55-esimo lancio si è vericata cinque volte *T*, al 56-esimo ci sia una probabilità maggiore di avere *C*.

Allo stesso modo, non esistono numeri ritardari al gioco del Lotto. Tutti i 90 numeri hanno la stessa probabilità di uscire, cioè 1/90. Se un dato numero non esce per una lunga serie di estrazioni, la probabilità che esso esca alla successiva estrazione è sempre 1/90, perché ogni estrazione è una prova indipendente da quelle precedenti, e da quelle successive. Puntare sui numeri ritardari è dunque azione priva di qualunque giustificazione logica. Si dirà: è vero, ma ogni tanto si sente dire di gente che ha vinto puntando su un numero ritardario che, alla fine, è uscito!. Certo! Proprio perché quel dato numero ha probabilità di uscire uguale a quella di tutti gli altri numeri, tra i casi che si possono verificare c'è certamente l'uscita di quello stesso numero. Ma questo vale ad ogni estrazione e per ciascuno dei 90 numeri.

(Piuttosto: se c'è un numero molto "ritardario", invece che scommettere sulla sua prossima uscita, sarebbe bene insospettirsi sulla correttezza delle estrazioni!).

Definizione **soggettiva** della probabilità

Ci sono situazioni in cui né la definizione classica, né la definizione soggettiva consentono di assegnare un valore di probabilità ad un dato evento. Per esempio, supponiamo di voler scommettere sulla vittoria delle nostra squadra del cuore in una partita di Champions League contro il Real Madrid. E' chiaro che i tre risultati possibili (1, X, 2) non sono equiprobabili e quindi non possiamo applicare la formula (1).
D'altra neppure serve a molto esaminare i risultati degli incontri precedenti tra le due squadre, perché nel frattempo sono cambiati i giocatori, gli allenatori, le condizioni ambientali ecc, in altre parole le "prove" non sono ripetute "nelle stesse condizioni". La probabilità diviene in questo caso una misura della fiducia che noi riponiamo nel fatto che la nostra squadra vinca; in termini di scommessa possiamo dire che:

la probabilità di un evento E è rappresentata dal rapporto fra il prezzo *P* che un individuo ritiene giusto pagare e la somma *S* che ha diritto ad avere in cambio se l'evento si verifica:

$$p(E) = \frac{P}{S}$$

Tale definizione è dovuta al matematico italiano Bruno De Finetti (1906 – 1985) ed è basata sul "principio di coerenza": l'individuo che accetta di pagare *P* per ricevere *S*, deve essere anche disposto a ricevere *P* da un'altra persona pagandole *S* se l'evento si verifica.
Notiamo incidentalmente che in questo approccio alla probabilità fa per la prima volta il suo ingresso in un discorso matematico un elemento legato alla soggettività dell'individuo: persone differenti assegneranno allo stesso evento probabilità differenti, a seconda del grado di fiducia che ripongono nel fatto che tale evento si verifichi. L'importante è che esse agiscano secondo il principio di coerenza.
Notiamo anche che il grado di fiducia che un individuo ha nel fatto che si verifichi un dato evento, e cioè la probabilità che egli assegna a quell'evento, dipende dal grado di informazioni che egli possiede relativamente all'esperimento aleatorio. L'informazione diviene così anch'essa un oggetto del discorso matematico.

Probabilità condizionata

Problema n. 5
Da un'urna contenente 10 numeri (da 1 a 10) si estraggono in successione due numeri. Determinare la probabilità dell'evento

C:"entrambi i numeri sono pari"

Il problema è del tutto analogo al problema n. 2. I casi possibili sono $D_{10,2} = 10·9$. I casi favorevoli sono $D_{5,2} = 5·4$. Allora

$$p(C) = \frac{D_{5,2}}{D_{10,2}} = \frac{5 \cdot 4}{10 \cdot 9} = \frac{2}{9}$$

Osserviamo ora che lo stesso risultato può essere ottenuto ragionando in modo differente. Scomponiamo l'evento *C* in due eventi *A* e *B*, così definiti:

A: " il primo numero estratto è pari";

B: "il secondo numero estratto è pari".

Allora $C = A \cap B$, cioè l'evento *C* è verificato se sono verificati entrambi gli eventi *A* e *B*.

Ora la probabilità di avere un numero pari alla prima estrazione è, chiaramente $p(A) = \frac{5}{10}$.

Per calcolare la probabilità che <u>anche</u> il secondo numero estratto sia pari, si deve tener conto che nella seconda estrazione i casi possibili si sono ridotti a 9 (uno dei 10 numeri è stato già estratto) e i casi favorevoli, nell'ipotesi che l'evento *A* si sia già verificato, cioè che il primo numero estratto sia stato pari, sono diventati 4. Questo comporta che la probabilità dell'evento *B*, **condizionata** all'ipotesi che si sia verificato l'evento *A*, è

$p(B|A) = \frac{4}{9}$ (il simbolo $p(B|A)$ si legge " probabilità di *B* **dato** *A*" o "probabilità di *B* **condizionata** ad *A*")

Allora possiamo scrivere

$$p(C) = p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B|A) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{2}{9}$$

Come si vede, abbiamo ottenuto il risultato precedente.
Questo esempio, però, ci consente di scrivere una legge di validità generale:

Dati due eventi *A* e *B*, la probabilità che si verifichino entrambi è data dal prodotto tra la probabilità che si verifichi *A* e la probabilità che si verifichi *B* sotto la condizione che *A* si sia verificato:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B|A)$$

(**Teorema del prodotto** (**per la probabilità condizionata**))

<u>Attenzione</u>: poiché non c'è alcuna differenza logica tra i due eventi *A* e *B*, il teorema del prodotto può essere scritto anche nel seguente modo:

$$p(A \cap B) = p(B) \cdot p(A|B)$$

Esercizio 4
Un'urna contiene i numeri da 1 a 10. Si estraggono due numeri, senza reimbussolamento. Determinare la probabilità dell'evento
A: "uscita di un numero pari ed uno dispari, in qualunque ordine". [5/9]

Problema n.6
Consideriamo ancora una volta l'urna contenente i numeri da 1 a 10. Supponiamo di estrarre i due numeri, questa volta con reimbussolamento. Determiniamo anche ii questo caso la probabilità dell'evento

C:"entrambi i numeri sono pari"

Scomponiamo l'evento *C* nei due eventi *A* e *B*:

A: " il primo numero estratto è pari";

B: "il secondo numero estratto è pari";

in modo che $C = A \cap B$

Come nel problema 4 $p(A) = \frac{5}{10}$; ma questa volta, nell'ipotesi che *A* si realizzi, quando estraiamo la seconda pallina l'urna contiene ancora 10 palline, di cui 5 pari, per cui $p(B|A) = \frac{5}{10}$ e pertanto

$$p(C) = p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B|A) = \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{1}{4}$$

Come si vede, c'è una sostanziale differenza tra l'estrazione con e quella senza reimbussolamento. Se non vi è reimbussolamento, l'esito della seconda estrazione dipende dall'esito della prima per cui, nel calcolo di $p(B|A)$, il supporre che *A* si sia realizzato è determinante. In questo caso si dice che *B* è **dipendente** da *A*. Se invece c'è reimbussolamento allora l'esito della seconda estrazione non dipende dall'esito della prima per cui, nel calcolo di $p(B|A)$, il supporre che che A si sia realizzato è irrilevante. In questo caso si dice che *B* è **indipendente** da *A*, e possiamo scrivere $p(B|A) = p(B|A^c) = p(B)$.

Allora possiamo generalizzare:

Dati due eventi *A* e *B*, indipendenti, la probabilità che si verifichino entrambi è data dal prodotto tra la probabilità che si verifichi *A* e la probabilità che si verifichi *B*:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

(**Teorema del prodotto** (**per eventi indipendenti**))

Esercizio 5
Si lanciano due dadi. Si calcoli la probabilità di ottenere come risultato 8, se si è sicuri che il risultato del lancio dà un numero pari.
Possiamo procedere come segue. Definiamo i due eventi:
A: "risultato pari";
B: "risultato 8".

Per calcolare la probabilità di *B*, **dato** *A*, consideriamo che il teorema del prodotto per la probabilità condizionata può essere letto anche in questo modo:

$$p(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

I casi possibili sono 36 (18 risultati pari, 18 risultati dispari), quindi $p(A) = \frac{1}{2}$.

Ora $A \cap B = \{(2,6);(3,5);(4,4);(5,3);(6,2)\}$ e, pertanto $p(A \cap B) = \frac{5}{36}$

Allora $p(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{\frac{5}{36}}{\frac{1}{2}} = \frac{5}{36} \cdot 2 = \frac{5}{18}$

Esercizio 6
In una popolazione animale si sa che la probabilità che un animale che adesso ha 12 anni sia ancora in vita tra 5 anni è dell'87%. Si sa anche che tale probabilità scende al 62% per un animale che invece adesso ha 20 anni. Si vule sapere qual è la probabilità che entrambi gli animali siano in vita tra 5 anni e la probabilità che almeno uno di essi sia in vita tra 5 anni, nell'ipotesi che gli eventi siano indipendenti.

Definiamo gli eventi:
A: "l'animale di 12 anni sarà in vita tra 5 anni";
B. "l'animale di 20 anni sarà in vita tra 5 anni".

Poiché i due eventi sono indipendenti la probabilità che <u>entrambi</u> siano in vita tra 5 anni è

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) = 0.87 \cdot 0.62 = 0.539 \approx 54\%$$

Per calcolare la probabilità che <u>almeno</u> uno dei due animali sia in vita tra 5 anni dobbiamo considerare il fatto che i due eventi, che sono sì indipendenti, sono tuttavia compatibili e, pertanto, dobbiamo applicare il teorema della probabilità totale:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0.87 + 0.62 - 0.54 = 0.95 = 95\%$$

Problema n. 7 (prima versione)
Un certo negozio di ciliegie si approvigiona per il 60% dalla Toscana e per il restante 40% da altre regioni. Il 30% delle ciliegie che arrivano al negozio dalla toscana hanno il baco, mentre solo il 20% di quelle provenienti da fuori regione sono bacate. Acquistando una ciliegia da questo negozio, qual è la probabilità di trovare il baco?
Possiamo risolvere il problema applicando i teoremi del prodotto e della somma. Indichiamo
A = "la ciliegia è di provenienza toscana";
B = "la ciliegia è bacata".

Allora abbiamo

$$p(A) = \frac{60}{100}; \qquad p(B|A) = \frac{30}{100}$$

$$p(A^c) = \frac{40}{100}; \qquad p(B|A^c) = \frac{20}{100}$$

Per il teorema del prodotto abbiamo

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B|A) \qquad \text{e} \qquad p(A^c \cap B) = p(A^c) \cdot p(B|A^c)$$

Ora i due eventi $A \cap B$ e $A^c \cap B$ sono chiaramente incompatibili tra loro e, inoltre la loro unione coincide con l'evento *B*. Dunque possiamo applicare il teorema della somma

$$p(B) = p(A) \cdot p(B|A) + p(A^c) \cdot p(B|A^c)$$

$$p(B)=\frac{60}{100}\cdot\frac{30}{100}+\frac{40}{100}\cdot\frac{20}{100}=0.26$$

Problema n. 7 (seconda versione)
Torniamo nel negozio di frutta del problema precedente, dove il 60% delle cilegie vendute proviene dalla Toscana, e il 30% di queste è bacato, mentre solo il 20% non toscane non risulta bacato. Ora, però, la domanda che ci facciamo è: avendo acquistato una ciliegia da questo negozio ed essendo risultata bacata, qual è la probabilità che sia di provenienza toscana?

Notiamo innanzitutto la diversità tra i due problemi. Nella prima versione si richiede una "previsione" ("quale sarà il risultato del mio acquisto?"), nella seconda si richiede una "anamnesi" ("visto il risultato, qual è stato il percorso – la causa – che l'ha prodotto?".
Nel secondo caso vogliamo conoscere la probabilità che "la ciliegia sia di provenienza toscana, **dato** il fatto che sia bacata", cioè $p(A|B)$.
Per fare questo calcolo ricordiamo che il teorema del prodotto consente di scrivere:

$$p(A\cap B)=p(B)\cdot p(A|B)$$

da cui

$$p(A|B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}$$

La probabilità $p(B)$ è stata determinata precedentemente: $p(B)=p(A)\cdot p(B|A)+p(A^c)\cdot p(B|A^c)$ e, inoltre, sappiamo che $p(A\cap B)=p(A)\cdot p(B|A)$. Pertanto

$$p(A|B)=\frac{p(A)\cdot p(B|A)}{p(A)\cdot p(B|A)+p(A^c)\cdot p(B|A^c)}=\frac{\frac{60}{100}\cdot\frac{30}{100}}{\frac{60}{100}\cdot\frac{30}{100}+\frac{40}{100}\cdot\frac{20}{100}}=\frac{9}{13}$$

La formula impiegata nel calcolo precedente costituisce il caso più semplice del cosiddetto **Teorema di Bayes:**

dato un evento *B* (effetto) e un insieme di eventi A_1, A_2, …, A_n (*cause*), la probabilità che l'evento *B* sia stato prodotto dalla causa A_i è

$$p(A_i|B)=\frac{p(A_i)\cdot p(B|A_i)}{p(A_1)\cdot p(B|A_1)+p(A_2)\cdot p(B|A_2)+\ldots+p(A_n)\cdot p(B|A_n)}$$

Esercizio 7
Tre macchine A, B e C di una certa fabbrica producono pezzi, di cui alcuni difettosi. A ha prodotto 2000 pezzi di cui il 5% difettoso, B ha prodotto 500 pezzi di cui il 20% difettoso e C ha prodotto 1000 pezzi di cui il 10% difettoso.
a) Qual è la probabilità che un pezzo preso a caso tra quelli prodotti risulti difettoso difettoso?
b) Supponiamo di aver preso a caso un pezzo e di aver scoperto che esso è difettoso. Qual è la probabilità che esso sia stato prodotto dalla macchina A?

Se siete riusciti a risolvere questo esercizio dovreste essere in grado di rispondere al seguente quesito.
In una certa città ci sono due compagnie di taxi, la Blu e la Nera. La Blu ha 15 taxi, la Nera 85. Una notte, molto tardi, un taxi investe un passante e si dilegua. Un testimone ha visto l'incidente e sostiene che si trattava di un taxi blu. L'ispettore allora si fa consegnare dalla compagnia dei taxi Blu i tabulati con gli orari di servizio di quella notte e identifica il taxi blu in servizio a quell'ora nella zona dell'incidente. Prima di arrestare il conducente, però, preso da scrupolo professionale, l'ispettore sottopone il testimone a un esame della vista in condizioni simili a quelle della notte in questione, e il risultato è che il testimone riesce a identificare

correttamente il colore di un taxi (blu o nero) quattro volte su cinque. Cosa deve fare l’ispettore? Deve arrestare il conducente del taxi Blu?