

Contributi Fondamentali di Bruno de Finetti in Economia Teorica

Simone Cerreia-Vioglio^a e Massimo Marinacci^b

^a*Dept. of Economics, Columbia University e Collegio Carlo Alberto*

^b*Dip. di Statistica e Matematica Applicata e Collegio Carlo Alberto,
Università di Torino*

Settembre 2006

In questo seminario si cercano di individuare quali siano stati i contributi fondamentali di de Finetti in economia teorica, con ciò pensando a contributi che siano effettivamente passati in letteratura e che ne abbiano influenzato gli sviluppi successivi.

Non ci occuperemo invece di contributi che, per quanto brillanti, siano “rimasti nel cassetto” e non abbiano influenzato in modo significativo la letteratura.

Vi sono almeno due contributi fondamentali in questo senso:

- 1) Modellizzazione soggettiva dell'incertezza;
- 2) Quasi-concavità e rappresentazione di preferenze.

INCERTEZZA

L'analisi classica di de Finetti della probabilità soggettiva e la sua grande originalità è ben nota.

Vi sono due aspetti di quest'analisi che sono di particolare rilevanza in economia teorica e che sono già presenti nel suo classico “Sul significato soggettivo della probabilità” apparso nel 1931 su *Fundamenta Mathematicae*:

- 1) metodo assiomatico, con uso di relazione binarie,
- 2) enfasi su osservabilità.

RELAZIONI BINARIE

In modo pioneristico, de Finetti usa una relazione binaria $\succsim$ per esprimere una “preferenza” e si domanda quali siano le condizioni necessarie e sufficienti su $\succsim$ affinché ne esista una rappresentazione numerica.

In altre parole, de Finetti adotta il cosiddetto metodo assiomatico (il primo articolo ad adottare questo approccio in economia teorica sembra essere stato il classico “Sur un problem d'économie pure” di Ragnar Frisch apparso nel 1926 sulla rivista norvegese *Norsk matematisk forenings skrifter*).

Nell'articolo del 1931, $\succsim$ è una relazione di probabilità comparativa tra eventi E in uno spazio di stati del mondo S .

In particolare, $E_1 \succsim E_2$ indica che “l'evento E_1 è non meno probabile dell'evento E_2 ”, e la rappresentazione numerica è data da una probabilità $P : 2^S \rightarrow [0, 1]$ tale che:

$$E_1 \succsim E_2 \iff P(E_1) \geq P(E_2).$$

Le condizioni proposte da de Finetti sono:

(i) $\succsim$ è completa e transitiva,

(ii) $S \succ \emptyset$ e $S \succsim E \succsim \emptyset$ per ogni evento E ,

(iii) dati tre eventi E_1, E_2 e E_3 tali che $E_1 \cap E_3 = E_2 \cap E_3 = \emptyset$, si ha:

$$E_1 \succsim E_2 \iff E_1 \cup E_3 \succsim E_2 \cup E_3$$

Vi è poi una condizione assunta implicitamente:

(iv) per ogni n esistono eventi $E_1, \dots, E_{2^n}$, a due a due disgiunti, tali che:

$$E_1 \sim E_2 \sim \dots \sim E_{2^n}$$

Si può mostrare (de Finetti dà uno schema di prova) che, se $\succsim$ soddisfa queste condizioni, allora esiste una probabilità $P : 2^S \rightarrow [0, 1]$ tale che:

$$E_1 \succsim E_2 \implies P(E_1) \geq P(E_2).$$

Questo risultato verrà poi perfezionato da Savage nel suo classico “The foundations of statistics” del 1954.

OSSERVABILITÀ

Altro aspetto cruciale della modellizzazione soggettiva dell'incertezza in de Finetti è l'enfasi sull'osservabilità.

Infatti, le probabilità soggettive vanno elicitate in modo comportamentale, partendo dalle scelte osservabili del decisori, quali per esempio la scelta tra scommesse su eventi. L'idea di base, che de Finetti attribuisce a Bertrand, è che la preferenza $E_1 \succsim E_2$ si riveli nella scelta del decisore di scommettere su E_1 piuttosto che su E_2 , ossia

$$xE_1y \succsim xE_2y$$

dove x e y sono numeri reali tali che $x > y$.

La preferenza $E_1 \succsim E_2$ non si basa quindi sull'introspezione, ma su scelte osservabili.

Nei suoi lavori de Finetti si concentra sull'elicitazione diretta della probabilità numerica $P(E)$ come prezzo di una scommessa (unitaria) su E (schema della scommessa e “scoring rules”).

Invece, il pieno sviluppo dell'approccio comparativo basato sulla relazione $\succsim$ e sulla sua elicitazione tramite confronti tra scommesse xEy si trova in Savage (1954), che come ben noto fa del lavoro di de Finetti uno dei due pilastri su cui costruisce la sua teoria (l'altro è la teoria dell'utilità attesa di von Neumann e Morgenstern).

In conclusione, nell'articolo del 1931 de Finetti combina in modo pioneristico due elementi fondamentali della moderna economia teorica del secondo dopoguerra, ossia il metodo assiomatico e l'enfasi sull'osservabilità delle ipotesi. Il suo approccio alla modellizzazione soggettiva dell'incertezza troverà poi pieno sviluppo nel fondamentale lavoro del 1954 di Leonard Savage.

QUASI-CONCAVITÀ

Una funzione $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ definita su un insieme convesso C di uno spazio vettoriale si dice *quasi-concava* se

$$f(tx + (1 - t)y) \geq f(x) \wedge f(y), \quad \forall x, y \in C, \forall t \in [0, 1].$$

Una funzione $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ è quasi-concava se e solo se tutte le sue curve di sopralivello $\{f \geq t\}_{t \in \mathbb{R}}$ sono convesse.

Le funzioni concave sono quasi-concave, mentre il viceversa è ovviamente falso. Vi è, tuttavia, una forma del “viceversa” che non è immediato escludere.

Data una funzione quasi-concava $f : C \rightarrow \mathbb{R}$, si consideri la classe di equivalenza $[f]$ composta da tutte le funzioni quasi-concave che condividono con f i medesimi insiemi di sopralivello $\{f \geq t\}_{t \in \mathbb{R}}$.

Q.1 Data una qualsiasi funzione quasi-concava $f : C \rightarrow \mathbb{R}$, esiste una funzione concava che appartiene a $[f]$?

Se ciò fosse vero, ogni funzione quasi-concava ammetterebbe una “equivalente” rappresentazione concava.

Vi è una formulazione equivalente (sotto alcune condizioni tecniche) di questa domanda.

Definizione 1 *Una stratificazione $\mathcal{C}$ di un insieme convesso C è una catena $\{C_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$ di insiemi convessi, con $\bigcup_{\alpha} C_\alpha = C$ e $C_\alpha \subseteq C_{\alpha'}$ se $\alpha > \alpha'$.*

La domanda che de Finetti si pone nel suo articolo “Sulle stratificazioni convesse”, apparso nel 1949 sugli *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, è:

Q.2 Data una stratificazione $\mathcal{C}$, esiste una funzione concava tale che $\{f \geq t\}_{t \in \mathbb{R}} = \mathcal{C}$?

Modulo alcune condizioni tecniche, le domande Q.1 e Q.2 sono equivalenti. Tuttavia, la Q.2 è quella economicamente rilevante.

Infatti, l'esempio fondamentale in economia di una stratificazione è quella generata dalle curve di indifferenza, in cui per ogni curva si considera l'insieme da essa inferiormente delimitato.

Di solito si assume che la forma delle curve sia tale che questi insiemi sono convessi, così che la loro collezione forma in effetti una stratificazione.

Lo studio delle curve di indifferenza comincia con il libro *Mathematical Psychics* del 1881 di Edgeworth, che le deriva quali insiemi di livello $\{u = t\}_{t \in \mathbb{R}}$ di una funzione (cardinale) di utilità u . La convessità degli insiemi determinati dalle curve di indifferenza è dovuta all'ipotesi standard di utilità marginali decrescenti.

Come è ben noto, tra il 1890 e il 1910, Pareto mostra come in realtà la teoria del consumatore si possa basare direttamente sulle curve di indifferenza, senza che sia necessario considerare un'eventuale funzione di utilità cardinale che le generi. Qui la convessità degli insiemi determinati dalle curve di indifferenza è dovuta all'ipotesi standard di saggi marginali di sostituzione crescenti (come evidenziato nel celebre "A reconsideration of the theory of value" di Hicks e Allen apparso su *Economica* nel 1934).

In questo modo, le stratificazioni assumono un ruolo centrale in economia teorica, e con esse le funzioni di utilità ordinali, che ne sono la rappresentazione numerica.

La nozione primitiva della teoria del consumatore è quindi data dalle curve di indifferenza, e dalla stratificazione che esse generano, e non più, come nel primo marginalismo, da un'ipotetica funzione cardinale di utilità che quantifichi il “piacere” che il consumatore trae da un dato bene (nel secondo dopoguerra quest'idea verrà formalizzata prendendo relazioni di preferenze binarie $\succsim$ quali nozioni primitive nella teoria del consumatore).

D'altra parte, l'idea che le usuali curve di indifferenza convesse in realtà nascano, alla Edgeworth, da una sottostante funzione di utilità concava rimane in letteratura. Rispondere alla domanda Q.2 è quindi essenziale per capire se questo modo Edgewortiano di guardare alle curve di indifferenza sia effettivamente senza perdita di generalità.

La domanda Q.2 che de Finetti si pone nell'articolo del 1949, motivata dal verificare la generalità di un aspetto dell'approccio Paretiano alla teoria del consumatore, lo porta a compiere il primo studio approfondito delle funzioni quasi-concave.

de Finetti mostra che la risposta alla domanda Q.2 è negativa: esistono stratificazioni “irriducibili”, per le quali non esiste alcuna funzione concava che le abbia come insiemi di sopralivello.

Quindi, è sbagliato pensare alle usuali curve di indifferenza convesse come implicitamente determinate da una sottostante funzione di utilità concava.

Nel mostrare questo risultato, de Finetti dimostra un primo profondo risultato per le funzioni quasi-concave, che ora brevemente esponiamo (si noti che l'articolo di de Finetti non è di facile lettura; come osserva Kannai nel 1977 “de Finetti’s paper contains a wealth of ideas; its precise meaning, however, is not always entirely clear”).

Date due funzioni $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : C \rightarrow \mathbb{R}$, diciamo che g è *più concava* di f , e si scrive $g \succeq f$, se esiste una funzione $h : f(X) \rightarrow g(X)$ strettamente crescente e concava tale che $g = h \circ f$.

La relazione binaria $\succeq$ è riflessiva e transitiva.

Data una funzione f , sia $\mathcal{U}(f)$ la collezione di tutte le funzioni concave $g : C \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $g \in [f]$. Una funzione $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *concavificabile* se $\mathcal{U}(f) \neq \emptyset$.

Teorema 1 (de Finetti 1949) *Sia $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione quasi-concava definita su un compatto e convesso C . Se f è concavificabile, allora esiste una funzione $g \in \mathcal{U}(f)$ che è minimamente concava in $\mathcal{U}(f)$ rispetto alla relazione $\succeq$ (ossia, $g \in \mathcal{U}(f)$ e $h \succeq g, \forall h \in \mathcal{U}(f)$).*

Lo studio di de Finetti sulla quasi-concavità passa immediatamente in letteratura, come mostra quanto scrive Fenchel nella sua classica monografia “Convex cones, sets, and functions” del 1953: “The problem of the existence and the determination of a convex function with prescribed level sets was raised and studied by de Finetti (1949)”.

Questo teorema di de Finetti si può riscrivere in termini di relazioni di preferenze.

Sia $\succsim$ una preferenza completa e transitiva definita su un convesso C . La preferenza $\succsim$ è convessa se

$$x \succsim y \implies \alpha x + (1 - \alpha) y \succsim y, \quad \forall x, y \in C.$$

Indichiamo con $\mathcal{U}$ la collezione di tutte le funzioni concave $u : C \rightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$x \succsim y \iff u(x) \geq u(y), \quad \forall x, y \in C.$$

Corollario 2 *Sia $\succsim$ una preferenza completa, transitiva e convessa definita su C . Se $\succsim$ ha una rappresentazione concava (ossia, $\mathcal{U} \neq \emptyset$), allora ne esiste una minimale in $\mathcal{U}$.*

Il risultato originario di de Finetti e questa sua versione vengono estesi negli anni '70 da Debreu (1976) e Kannai (1977), che cercano di dare un'interpretazione cardinalista alla minima funzione concava che rappresenta $\succsim$.

L'interesse metodologico e la profondità matematica dell'articolo del 1949 di de Finetti sulle stratificazioni convesse ne fanno il canto del cigno della scuola di economia teorica italiana, sviluppatasi attorno a Pareto e la cui importanza è testimoniata da Schumpeter nel suo *History of Economic Analysis* "the most benevolent observer could not have paid any compliments to Italian economics in the early 1870's; the most malevolent observer could not have denied that it was second to none by 1914. The most conspicuous component in this truly astounding achievement was no doubt the work of Pareto and his school".

Bisognerà aspettare i risultati della seconda metà degli anni '80 di Luigi Montrucchio in economia dinamica per avere di nuovo in Italia risultati di economia teorica di impatto paragonabile a quelli ottenuti nei lavori di quella gloriosa scuola.