Sulla "legge dei grandi numeri", sulla "legge empirica del caso" e sull'apprendimento attraverso l'esperienza, anche in connessione con alcune questioni del "teorema del limite centrale": aspetti storici, epistemologici e didattici.

Mario Barra

Convegno Internuclei per la scuola dell'obbligo
di Monticelli Terme-PR, 5-7 aprile 2001

Per molti aspetti della conoscenza, del pensiero, della sua espressione, e della cultura, si ritiene centrale il tema proposto.

Si tratta di cercare di rispondere a domande, strettamente collegate, del tipo:

D_1) perché la stragrande maggioranza delle persone pensa che lanciando più volte una moneta, il numero delle teste debba tendere a quello delle croci?

D_2) perché Charles Sanders Peirce, che conia e definisce il termine "abduzione" come l'atto inferenziale con cui si passa da certi fatti osservati ad un principio generale che li spieghi, ha bisogno di questo "salto abduttivo" dalle osservazioni effettuate ad un "principio generale che li spieghi"? Un salto analogo, ma più "aggiornato", é presente nei metodi di "falsificazione delle ipotesi"

D_3) perché sono ancora diffuse tali interpretazioni (Umberto Eco), quando invece la spiegazione di un fenomeno può essere espressa in modo più aderente alla realtà e generale in termini di "gradualità" di affermazione di una o più fra varie ipotesi, con una velocità più o meno accentuata e con oscillazioni di segno opposto sulla sua credibilità?

D_4) perché Popper ha bisogno di parlare sia di probabilità sia di "corroborazione", quando invece anche le persone meno informate possono capire che il secondo termine è riconducibile al primo?

D_5) perché l'apprendimento induttivo è così poco considerato?

D_6) come mai si tiene conto in modo limitato della gradualità e delle difficoltà che nella storia sono state necessarie alla affermazione di molte teorie innovatrici, come l'eliocentrismo, l'evoluzione, la genetica mendeliana, la relatività, la fisica quantistica, la deriva dei continenti e la struttura del DNA?

Queste domande sono collegabili a moli errori frequenti ed a semplificazioni che possono manifestarsi nelle persone con qualsiasi grado di cultura e si sono verificati frequentemente nella scienza stessa. A questa faranno riferimento i termini che verranno usati. "Sfumando" le parole, gli aspetti considerati si possono generalizzare ad un insieme più ampio.

Si riportano di seguito alcuni di questi errori:

E_1) ritenere di aver dimostrato una teoria attraverso pochi esempi considerati (es.: "la fusione fredda") o "credere troppo" alle frequenze osservate considerando unicamente le frequenze stesse.
E_2) ritenere di aver confutato una teoria avendone confutato una particolare spiegazione, conseguenza o applicazione: mentre è possibile che una singola spiegazione sia inessenziale, o che una singola applicazione sia inficiata per circostanze accessorie (es.: le ipotesi di Velikovsky su alcune vicende del sistema planetario, sono state dichiarate assurde, fra l'altro, perché implicavano per la temperatura di Venere valori troppo elevati… in seguito confermati da Mariner II e da altre osservazioni);
E_3) omettere di considerare una parte dei dati, dei fatti osservati o delle possibili conseguenze. Questo è possibile solo nella logica del "certo": partendo unicamente da una parte dei dati *certi*, la conclusione condurrà ad un insieme più ristretto di conclusioni che saranno tuttavia *certe*. La loro maggiore applicabilità si recupera talvolta attraverso delle generalizzazioni arbitrarie (vedi oltre, parlando di Galileo e Gauss a proposito della "curva a campana");
E_4) ritenere di poter rigettare una teoria innovativa attraverso gli errori che si manifestano nelle prime definizioni o applicazioni, quando tali errori sono una conseguenza attribuibile alle esigenze ed alle dinamiche dell'innovazione, "quasi" indipendentemente dalla verità della teoria stessa, che spesso è comunque apportatrice di fermenti fruttuosi (es.: difficoltà di affermazione del "nuovo"). Spesso le prime esperienze debbono essere considerate in modo diverso dalle successive.
Considerando tutto questo non si ritiene necessaria una "estrema" precisione, ma almeno una attenzione nel linguaggio che tenga conto dei vari aspetti coinvolti.

Data la sua complessità e aderendo alla filosofia del Fusionismo (vedi oltre), si ritiene l'argomento difficilmente isolabile dalle numerose questioni che coinvolge.

Su tale tema si sta lavorando dal 1972. In questo periodo si è passati da una fase ampiamente sperimentale ad una lunga fase di "analisi a priori". La ricerca é inclusa in tre obbiettivi generali:
O_1) cercare di "semplificare" le questioni rilevanti del calcolo delle probabilità, tendendo a renderle "visualizzabili" (la probabilità è una misura "atipica" di oggetti "invisibili"), cercando anche di elaborare una teoria didattica idonea ("nuclei di condensazione") a interpretare problemi e metodi;
O_2) collegare vari settori della matematica e della scienza e i loro linguaggi (secondo la filosofia del "Fusionismo" di Felix Klein e, più nei dettagli e con numerosi esempi, di Bruno de Finetti), in funzione del loro insegnamento e degli aspetti pedagogici connessi. Si intende in particolare tale obbiettivo come uno degli apporti

più positivi che può dare la matematica per "sintonizzarsi"[1] con la cosiddetta "globalizzazione";

O_3) definire un programma minimo di riferimento per la scuola "senza ε e δ":
- limitando derivate ed integrali (e quindi il limite) ad aspetti giudicati molto più comprensibili da studenti universitari e da insegnanti;
- ampliando con strumenti recenti (B-Spine, viste semplicemente) la possibilità di approssimare funzioni - collegando notevolmente gli argomenti matematici [es.: Barra 1995 e 1999]. (Si intende su tale base allargare la sperimentazione).

A proposito di quanto è stato detto, chi scrive comincia soltanto ora ad avere, forse, qualche chiarezza, in particolare attraverso una prima definizione di O_3).
La ricerca considera:

a) l'analisi di circa 300 risposte ad un questionario, che è stato sottoposto per 9 anni: - agli insegnanti, all'interno di vari gruppi di lavoro; - agli studenti (da 2 anni) della SSIS; - agli studenti (da 9 anni), all'inizio del corso di calcolo delle probabilità tenuto da chi scrive al Dip. di Matematica dell'Università "La Sapienza"; - agli studenti di alcuni licei. La ricerca si collega anche: - a quanto è emerso da alcune interviste effettuate, da altri o da chi scrive, ad alcuni personaggi di cultura; - all'analisi delle trattazioni dell'argomento nei libri;

b) i risultati di alcuni approfondimenti storici ed epistemologici che sono stati condotti da chi scrive, (almeno in tre casi in modo originale), a proposito delle prime intuizioni e formulazioni dei fenomeni in esame;

c) il dibattito epistemologico connesso con l'argomento;

d) alcune ricerche didattiche generali sull'apprendimento di concetti matematici fondamentali in modo significativo [Freudenthal 1983; Sierpinska 1994] e sui problemi che presenta il "pensiero matematico avanzato" [Tall 1991], cui si aggiunge l'analisi di alcuni autori che si sono occupati dell'argomento [Hacking 1975; Lakoma 2000];

e) alcune ricerche didattiche collegate in particolare all'apprendimento induttivo.

In questo convegno si vuole più che altro presentare la ricerca nel suo complesso con alcune indicazioni generali, limitandosi:

A) a trattare alcuni particolari delle risposte e della traduzione didattica relativa ad una delle questioni presenti nel punto a) e contenuta nella domanda D_1). Questo perché tale argomento è propedeutico agli altri e fonte di un numero incredibile di errori, presenti ovunque. Si cercherà di isolare i "punti più critici" della questione, con qualche collegamento alla problematica generale;

B) a dare alcuni flash, che si spera siano significativi, sugli altri punti.

A) Un esempio significativo anche nei suoi particolari[2]

---

[1] Si chiede scusa per l'eccessiva presenza di "virgolette" rese necessarie dalla mancanza di spazio. Si chiede scusa anche per aver superato lo spazio consentito, ma pur limitandosi spesso a pochi cenni, non è stato possibile fare altrimenti in una sola relazione.

[2] Si ringrazia il professor Aldo Visalberghi per la segnalazione dell'articolo che viene commentato in quanto segue.

Si tratta di una intervista del giornalista Carlo Formentini a Diego Fabbri, semiologo, direttore dell'Istituto di Cultura Italiana a Parigi, pubblicata sul "Supplemento 7" al Corriere della Sera[3]. C'è anche una foto dell'intervistato in ciascuna delle tre pagine dell'articolo.

(Titolo a carattere molto grande): **Il segno del destino**

(Sottotitolo in carattere meno grande ma sempre in grassetto e tutto sottolineato):

Maghi e astrologi che fanno affari d'oro. Profeti che annunciano apocalissi di fine millennio. Ragazzi che sfidano la morte giocando col destino. Inequivocabili segni dei tempi o mode effimere? Lo abbiamo chiesto a Diego Fabbri, semiologo, direttore dell'Istituto di Cultura Italiana a Parigi, che si prepara a organizzare un Convegno Internazionale dedicato a questi temi assieme all'antropologo Franco la Cecla.

(Fra virgolette vengono riportate le parole dell'intervistato ed in corsivo le domande dell'intervistatore. Le sottolineature e i caratteri in grassetto vengono aggiunti per indicare le frasi che verranno attraverso dei commenti fra parentesi).

Il semiologo parla dell'efficacia simbolica degli oroscopi, della morte, di vecchi saggi, di senso del sacro e di segni del destino. Poi afferma:

"I giocatori sanno che esistono delle serie statistiche. Ogni volta che io lancio un dado a sei facce ho esattamente sei probabilità di fare uno, **se però l'ho già lanciato duecento volte e l'uno non è mai venuto, la probabilità che venga al prossimo lancio é molto elevata**. Il giocatore tenta di sfruttare la contingenza, di "orientarla" interpretando tutta una serie di segni. Umberto Eco, che odia parole come intuizione e sesto senso, chiama tutto ciò "abduzione",…"

E i bari? (chiede l'intervistatore)

"Il baro è irritante perché è dominato dalla pura volontà di vincere. Ciò che disturba **non è tanto che viola le regole, quanto che non capisce che lo spirito del gioco consiste** nel cercare la contingenza dentro la regola. Il baro è incapace di godersi l'attesa della serie positiva, della "serata buona"".

"… I segni del destino sono rime di avvenimenti, analogie, somiglianze. In fondo la magia è una variazione sul principio razionale di causalità, la ricerca dei nessi invisibili che costituiscono l'ordine del mondo, esattamente come la scienza".

I giocatori sanno che esistono delle serie statistiche" (le serie statistiche non incidono sul risultato di un dado)…esattamente sei probabilità di fare uno (voleva dire probabilità $\frac{1}{6}$)…**se però l'ho già lanciato duecento volte e l'uno non è mai venuto, la probabilità che venga al prossimo lancio è molto elevata** (non è vero. La probabilità rimane sempre la stessa)…Umberto Eco … chiama tutto ciò "abduzione",…(come abbiamo visto Peirce parla di un altro aspetto, comunque

[3]Il tempo ha reso poco leggibile la data di pubblicazione scritta a penna sull'articolo ritagliato dal giornale. Dovrebbe trattarsi del "Supplemento 7", Corriere della Sera, 29 agosto 1992. Il testo dell'intervista, un po' datata ma molto "interessante", è invece perfettamente leggibile.

significativo. Qui, sia i fatti osservati che il principio generale, dovrebbero essere riportati con un significato opposto a quello indicato) … Il baro è irritante …. Ciò che disturba **non è tanto che viola le regole, quanto che non capisce che lo spirito del gioco consiste** nel cercare la contingenza dentro la regola. Il baro è incapace di godersi l'attesa della serie positiva, della "serata buona" (povero baro!).

Il problema si inserisce nella maggiore attenzione che richiede la comprensione delle questioni probabilistiche, nella intrinseca difficoltà di 'verificarle' nell'esperienza, nel fatto che in questa si faccia spesso riferimento ad eventi correlati (es.: una persona che, mentre stava arrivando, ha visto passare tre degli autobus che doveva prendere, si aspetta giustamente una lunga attesa per il prossimo) e infine, nella limitata competenza per il loro insegnamento. Proprio per questo motivo Peirce ha osservato che in nessuna altra branca della matematica è tanto facile, per tutti, prendere degli abbagli come nella teoria delle probabilità. Così Leibniz, uno fra i più insigni matematici di ogni tempo, pensava che fosse egualmente probabile ottenere 11 o 12 nel lancio di due dadi. Jean le Rond d'Alembert, il grande matematico francese del XVIII secolo, non riuscì a vedere che i risultati ottenibili lanciando una moneta tre volte sono uguali a quelli di tre monete lanciate contemporaneamente, e credeva che dopo una lunga serie di teste, una croce fosse più probabile. Da Jean le Rond d'Alembert a Diego Fabbri (vedi intervista), pur "mutatis mutandis", il tempo è passato inutilmente.

Importanza pedagogica del calcolo delle probabilità in breve L'importanza del calcolo delle probabilità riceve riconoscimenti crescenti sia dal punto di vista scientifico che pedagogico. In particolare in un'epoca nella quale le componenti di routine della produzione e dell'organizzazione vengono sempre di più assorbiti dai computer e dagli automi, può risultare utile esercitarsi in una materia nella quale la standardizzazione dei problemi è molo limitata ove è necessario affrontare ogni questione in modo spesso creativo e la soluzione va pensata e ripensata e possibilmente "corroborata" attraverso la sperimentazionen che dev e però essere intesa correttamente.

Il problema matematico tradotto didatticamente

"Statisticamente", sinteticamente e limitandosi alla domanda che consideriamo: "lanciando più volte una moneta ("simmetrica[4]"), il numero di teste tende al numero delle croci?[5]" la percentuale delle risposte affermative degli insegnanti è poco maggiore a quella degli studenti, pur altissima (circa 70%). In generale si evidenzia l'ipotesi che tale frequenza risulti circa direttamente proporzionale alla cultura "presumibile" dei soggetti coinvolti. Approssimativamente nel 20% dei casi l'errore viene superato attraverso esortazioni del tipo: "cerca di rappresentarti mentalmente l'esperimento e che cosa può accadere dopo 10, 100, … , lanci".

---

[4]Il termine "simmetrica" indica sinteticamente che le due facce della moneta hanno uguale probabilità 1/2.

[5]Naturalmente la domanda può essere riformulata, in modo equivalente, chiedendo se la differenza fra questi numeri tende a zero.

Si analizzano quindi le possibili cause dei relativi misconcetti e degli errori giungendo, ad esempio, alle seguenti considerazioni:

1) non sembra trattarsi soltanto di un ostacolo epistemologico o dell'effetto dell'influenza di fattori psicologici, anche se si ribadisce che questi aspetti intervengono in generale sulla comprensione di fenomeni aleatori;

2) in alcune circostanze la questione didattica nodale del problema, sembra risiedere nella confusione fra frequenza assoluta e relativa e nell'esigenza di contrastare argomentazioni errate, "culturalmente evolute", del tipo: se la frequenza relativa di testa "tende" a quella di croce, allora se c'è un eccesso di teste deve esserci un "recupero delle croci". Questa considerazione deve essere mostrata falsa in modo semplice, ma puntuale, anche collegando il numero infinito di prove necessarie per la dimostrazione del teorema coinvolto, con il numero finito di esperienze cui possono far riferimento gli intervistati. Spiegazioni sintetiche, come ad esempio: "la moneta non ha memoria", pur essendo stupendamente espressive, non chiariscono puntualmente gli aspetti riposti nel nodo della questione, la cui comprensione è legata a quanto detto e al ruolo giocato dalle differenti velocità di crescita verso l'infinito di due grandezze che possono essere considerate per approfondire l'argomento;

3) le responsabilità dell'insufficiente comprensione della "legge dei grandi numeri", della "legge empirica del caso" e dell'apprendimento attraverso l'esperienza, sembrano dipendere anche da alcuni errori, quanto meno didattici, e dalla limitata chiarezza o dalla eccessiva disattenzione sulla questione, da parte di libri ed autori, anche autorevolissimi, e infine e ad esempio, dalla loro errata o scarsa precisione nel rappresentare graficamente i fenomeni in questione (es.: mettere una crocetta ogni volta che si verifica un evento, senza aggiungere altro). Tali errori e imprecisioni, almeno didattici, sono stati commessi a cominciare dai primi ricercatori che si sono occupati dell'argomento: Piaget, Petter, …, fino ai più recenti. Lo stesso S. M. P., occupandosi di probabilità, mette a confronto, senza alcun commento, due esempi ove, all'aumentare del numero delle prove, gli scarti fra i numeri che esprimono le uscite in un dado invece di aumentare, diminuiscono. Ovviamente anche questa circostanza si verifica in modo praticamente certo, ma conoscendo quanto è probabile sbagliare a proposito, l'attenzione nel trattare l'argomento dovrebbe essere maggiore.

Successivamente a questa analisi si presentano delle semplici argomentazioni (con un minimo di aspetti tecnici[6]) che sembrano risultare maggiormente significative e convincenti di quelle tradizionali per la comprensione degli argomenti analizzati. Tali argomentazioni vengono accompagnate da una possibile rappresentazione grafica originale di alcuni loro aspetti, che tiene conto delle peculiarità matematiche che il tema presenta.

---

[6] Tali aspetti verranno trattati sinteticamente, aggiungendo in nota dei semplici approfondimenti che richiedono ulteriormente solo la comprensione del significato e delle proprietà della varianza di variabili aleatorie non correlate.

La media della "differenza fra teste e croci" tende all'infinito. Lanciando n volte una moneta simmetrica, la media della differenza in valore assoluto fra il numero delle teste (n_t) e quello delle croci (n_c) ha una crescita dell'ordine[7] di $\sqrt{n}$: $|n_t - n_c| \cong \sqrt{n}$. Dunque, contrariamente a quanto si può credere, tale differenza non va a zero ma tende all'infinito come $\sqrt{n}$. I valori considerati: n_t ed n_c, rappresentano la frequenza assoluta. Per passare a quella relativa bisogna dividere n_t ed n_c per il numero n dei lanci effettuati. Così risulta:

$\left|\frac{n_t}{n} - \frac{n_c}{n}\right| \cong \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$ che tende a zero al crescere del numero dei lanci.

Se c'è stato un "eccesso" di teste non è necessario un recupero delle croci". Supponiamo "per assurdo" che nei primi 100 lanci di una moneta "simmetrica" venga sempre testa[8]. La frequenza relativa di testa, che vale ora $\frac{100}{100}$, all'aumentare del numero dei lanci, può tendere ad $\frac{1}{2}$ senza la necessità di alcun "recupero" nel numero delle croci. Infatti se, per esempio, testa comparisse su metà degli n lanci successivi, egualmente all'aumentare di n si avrebbe[9]:

$\frac{100+\frac{n}{2}}{100+n} \to \frac{1}{2}$. In altri termini, l'apporto alla frequenza relativa dei primi risultati, tende a zero: $\frac{100}{100+n} \to 0$. Questo suggerisce una traduzione grafica, di quanto abbiamo detto, che nelle nostre sperimentazioni è sembrata utile.

Si lancia più volte una moneta e si mettono a confronto i numeri delle uscite di testa e croce rappresentando ciascuna di esse <u>all'interno di quadrati con le stesse dimensioni, attraverso dei rettangolini che divengono in tal modo sempre più piccoli</u>. Per rappresentare ad esempio i risultati di 20 lanci di una moneta: 12 teste ed 8 croci, si può dividere un quadrato Q in 5·4=20 rettangolini, colorandone di seguito 12 in giallo ed 8 in rosso. Allo stesso modo si procede, dividendo dei quadrati

---

[7] Tale ordine di grandezza si può valutare tenendo presente in generale che nel caso di n variabili aleatorie indipendenti di varianza σ^2 (gli eventi di probabilità p sono variabili aleatorie, che assumono i valori zero e uno, di media p e varianza $\sigma^2 = p(1-p)$. Nel nostro caso gli eventi sono: "esce testa nel lancio h-simo" di probabilità e media 1/2 e varianza 1/4), la varianza della somma S (S per noi indica quante volte l'evento si è verificato, cioè la frequenza assoluta 'delle teste') è pari alla somma delle varianze $\sigma^2(S) = n\sigma^2$ (per noi: n/4). Quindi σ^2 e σ crescono rispettivamente secondo n e $\sqrt{n}$. Nel nostro esempio la differenza fra il numero delle teste e il numero delle croci, che vale S-(n-S) = 2S-n, ha quindi varianza $\sigma^2(2S-n) = 4n/4 = n$. Cresce quindi secondo $\sqrt{n}$ la sua radice, cioè lo scarto quadratico medio σ, che misura per eccesso la media del valore assoluto di 2S-n.

[8] Questo evento si verifica con probabilità bassissima: 2^{-100}, che è dell'ordine di 10^{-10}.

[9] Ovviamente lo stesso limite si avrebbe se le teste sugli n lanci successivi risultassero $n/2 \pm a\sqrt{n} \pm b$.

uguali a Q in rettangoli sempre più piccoli e più o meno simili ai precedenti[10], quando i lanci e i risultati sono ad esempio: 100 (56 teste e 44 croci), 400 (214 teste e 186 croci), 1000 lanci (482 teste e 518 croci), e 4000 (2029 teste, 1971 croci)[11]. L'andamento della frequenza relativa è così molto "soddisfacente" perché riproduce la differenza teorica da 1/2 ed anche la sua rappresentazione traduce bene gli aspetti particolari del fenomeno in esame. La differenza fra i rettangolini rossi e gialli, che è dell'ordine della radice del numero dei lanci effettuati, viene così rappresentata in Q, unicamente dal numero dei rettangolini di un suo lato. Aumentando questi in numero, diminuisce il lato e la loro area diminuisce maggiormente con il quadrato di questo, rendendo la differenza fra l'insieme dei rettangoli rossi e l'insieme di quelli gialli sempre meno percepibile, mentre i due insiemi si confondono con metà quadrato indicando per ciascuno, probabilità $\frac{1}{2}$. Risulta così impossibile sullo stesso quadrato, aggiungere gradualmente ai precedenti, dei rettangolini per indicare i nuovi risultati sulle monete, ma la traduzione globale del nodo concettuale della Legge dei Grandi Numeri è puntuale ed espressiva [Barra, in corso di stampa$_1$].

B) Per quanto riguarda il punto **b)** sembrano interessanti alcuni approfondimenti sulla "preistoria" del calcolo delle probabilità e, ad esempio, lo studio delle intuizioni di Cardano e la presenza in Galileo di formulazioni qualitativamente corrette sia della "legge dei grandi numeri", sia della "curva degli errori" [Barra, in corso di stampa$_2$]. Tale ricerca ha portato alla formulazione di un collegamento semplice e diretto fra i due aspetti, sperimentato con apparente successo. Tale collegamento è di tipo analitico-geometrico e visualizza alcuni aspetti di questi due cardini teorici del calcolo delle probabilità e della statistica portando ad esempio a dimostrare la "legge dei grandi numeri" attraverso una considerazione immediata e sempre visualizzabile, che non necessita del ricorso alla disuguaglianza di Cebysev.

Alcune considerazioni di Galileo, prive dell'esigenza di una semplificazione che a volte risulta necessaria per la formulazione di un modello matematico riguardante un fenomeno della realtà, portano a considerare in modo critico la successiva elaborazione teorica formulata da Gauss a proposito dell'interpretazione degli aspetti in esame come "curva degli errori" che risulta simmetrica rispetto alla media. Queste sono in particolare e sostanzialmente le parole di Galileo: 'se l'altezza di monte Morello è 5000 piedi, è possibile che venga valutata 11.000 piedi, ma certo non come una voragine profonda 1000 piedi. A tale riguardo si considera utile, a livello sia scientifico che didattico, la crescita di un atteggiamento critico e consapevole nei confronti di una questione così centrale e "soffusa di mistero", che potrebbe derivare appunto sia da alcune ipotesi sull'origine dei risultati di Galilei, sia dall'attenzione alle critiche che questo autore indirettamente rivolge alle semplificazioni successivamente operate su tale questione (l'insorgere della "curva a

[10] Il quadrato viene diviso in un numero di righe il più possibile uguale a quello delle colonne.

[11] Nelle nostre sperimentazioni si sono messi insieme i risultati ottenuti da più classi, ulteriormente divise in gruppi.

campana" in molti istogrammi di frequenza si presenta in casi così numerosi, in ambiti così differenti ed in modo così "misterioso" che a suo tempo fu data anche come "prova" dell'esistenza di Dio).
Probabilmente la stessa esigenza di semplificazione di cui si è parlato ha portato praticamente tutta la ricerca storica, e grandissimi autori come Laplace, ad attribuire a Pascal e a Fermat la soluzione di un problema centrale del calcolo delle probabilità, assolutamente connesso con gli argomenti proposti, che viceversa verrà risolto compiutamente e gradualmente, nelle sue formulazioni originali più complesse, nell'arco dei 300 anni successivi a quelli delle soluzioni indicate [Barra 92].
Dal punto di vista sia storico che epistemologico, le responsabilità di cui ai punti **b)** e **c)** possono essere collegate, almeno parzialmente, al dibattito epistemologico connesso con la "perdita della certezza" o alle concezioni che hanno limitato l'illusione del valore assoluto della scienza. Più in particolare si ritiene molto probabile un collegamento degli aspetti analizzati con la difficoltà, molto rilevante dal punto di vista storico, di conciliare la proprietà di indipendenza stocastica delle variabili aleatorie con la possibilità di apprendere dall'esperienza, che è impossibile limitandosi all'indipendenza stocastica. Tale difficoltà ha portato a due fenomeni di segno opposto: - una eccessiva semplificazione del modello matematico usato per interpretare i fenomeni in esame e l'utilizzo di "adhoccaggini" per risolvere i problemi particolari che non possono rientrare nelle semplificazioni operate; - una notevole complicazione delle teorie generali di inquadramento del problema all'interno delle quali si annidano sia errori, che posizioni astruse, incomprensibili.

In modo più specifico, per il punto **c)** si è cercato di approfondire le posizioni e le ricerche, connesse con l'argomento, presenti negli scritti di Popper, Carnap, von Mises, Keynes, Kolmogoroff, Reichenbach, de Finetti, Peirce, Piaget, Petter, Freudenthal, Polya, Fischbein, Tolman e Brunnwick, … . Tali collegamenti sono stati, certamente, resi possibili dalla vicinanza, per molti anni, di chi scrive, con de Finetti che, in particolare con gli autori nominati, ha aperto un dialogo o una polemica, diretta o indiretta, che si è allargata al mondo della scienza.

In relazione al punto **d)** si analizzano in particolare le posizioni e le ricerche condotte ad esempio da Lakoma, che, nell'ultimo ICME, ha sottolineato più volte esplicitamente l'importanza delle indicazioni storiche fornite da chi scrive. Conducendo questa analisi si rileva che questa ricercatrice ed altri autori, affrontano in modo approfondito solo alcuni aspetti del problema in esame, ignorando le sue evoluzioni e le varie connessioni con altre questioni fondamentali, necessarie per una completa comprensione, almeno matematica, dell'argomento.
In **e)** si considerano ad esempio le ricerche collegate alla "Stimulus Sampling Theory (SST)" elaborata da autori affermati [vedi rassegna in Fischbein, 1975] come Estes, Bush e Mosteller, Suppes, Atkinson, Rouanet, Rumanian, Iosifescu e Theodorescu, Hilgard e Bower … .

Globalmente e sintetizzando molto, **b)**, **c)**, **d),** ed **e)** mettono in evidenza che:

- i ricercatori citati, ed altri autori, molto famosi ed anzi artefici della concezione epistemologica divenuta quasi dominante, in particolare ad opera di Popper, agiscono all'interno del dibattito epistemologico, che ha avuto inizio nei primi anni del ventesimo secolo e rimane ancora attuale, sviluppatosi sulla relatività di Einstein, sull'indeterminismo di Heisemberg, sul neoempirismo viennese e sulla filosofia anglosassone. Tale dibattito comprende in particolare l'accettazione dell'impostazione soggettivista del calcolo delle probabilità e la valutazione del ragionamento induttivo (che ad esempio è fortemente svalutato da Popper) all'interno del processo sia creativo (Polya), che di apprendimento. Di questi processi de Finetti fornisce un modello matematico esemplificabile in quello Bayesiano che si vorrebbe proporre. Tale modello, in generale, fornisce anche una traduzione matematica del processo induttivo di apprendimento, rivalutandolo notevolmente.
- in numerosi casi e anche su questi argomenti, la presenza di semplificazioni poco utili didatticamente, o di "alchimie" teoriche, scientificamente non sostenibili, anche se godono di moltissimo credito, appaiono necessarie a questi autori in mancanza di un modello Bayesiano per una teorizzazione coerente, e quindi anche per la comprensione, degli argomenti trattati. Tale modello verrà presentato, tempo permettendo, in un caso molto semplice e facilmente generalizzabile in relazione ai concetti che coinvolge. Potrà trattarsi di una divulgazione del concetto di "scambiabilità" o di "indipendenza subordinata" di de Finetti, che viene considerata dall'autore stesso il suo contributo più importante alla ricerca scientifica. Sebbene questi argomenti siano presenti da circa 70 anni e risolvano ad esempio molti problemi e incongruenze della statistica precisando il significato di alcuni suoi metodi, è significativo che Helmut Swoboda, nel suo bel libro del 1971 "La statistica moderna illustrata" (con prefazione del premio Nobel, (1969) per le Scienze Economiche, Ragnar Frisch) affermi, a proposito dei temi che stiamo considerando, che la maggioranza dei libri di statistica li ignorano, considerandoli praticamente delle stramberie inutili. Si fa presente inoltre, che soltanto da pochi anni la ricerca internazionale in fisica ha cominciato a tenere in considerazione gli aspetti teorici in questione.

Poiché:

I) si tratta praticamente di dare indicazioni per comprendere in che senso siano poco sostenibili le semplificazioni di cui si è parlato, a partire da quelle operate da Pascal e Fermat, fino a quelle di Lakoma e di moltissimi altri, e di fornire un modello per approfondire molte questioni degli aspetti problematici elencati all'inizio di questo scritto;

II) dopo molte incomprensioni, l'impostazione soggettivistica si è largamente diffusa fra i matematici e gli statistici, ottenendo riconoscimenti internazionali anche da economisti insigniti di premio Nobel, da filosofi, psicologi e pedagogisti (due sole citazioni: "Il pensatore italiano che più mi ha influenzato è Bruno de Finetti, dopo di lui colloco Giovan Battista Vico", R. Nozich (filosofo); "Teoria delle probabilità

[Einaudi 1970] di Bruno de Finetti è destinato sicuramente ad essere riconosciuto come uno dei grandi libri del mondo", D. Lindley (matematico). Tali riconoscimenti ad esempio hanno portato: - a considerare Bruno de Finetti, da alcuni anni, una fonte privilegiata per i più diffusi manuali di "Management" e di "Statistica applicata" della "Harvard School of Administration" - ad istituire, dal 1995, un premio scientifico in suo onore da parte dell'European Association for Decision Making),

si considera utile dare qualche cenno sui semplici nodi concettuali della indipendenza stocastica subordinata e della statistica bayesiana, invitando a fare un interessantissimo confronto con i pasticci degli altri autori, citati nel dare alcune indicazioni a proposito di c) ed e), e accontentandosi personalmente comunque di aver segnalato alcuni problemi.

A proposito di una questione classicamente statistica (es.: individuare la probabilità di un evento A che si realizza quando un individuo di una popolazione ha una certa preferenza A. Il modello è però più generale), si considerano varie ipotesi H_i, anche "tutte quelle che praticamente" ha senso considerare (es.: tutte le percentuali possibili della popolazione che possono preferire A) ciascuna con la propria probabilità p_i (ricavata soggettivamente, anche approssimativamente, attraverso le informazioni che si possiedono). Inizialmente la probabilità p(A) è data dalla media dei valori considerati dalle varie ipotesi calcolata attraverso le probabilità p_i delle ipotesi stesse. Più individui partono da valutazioni diverse, ma, a parità di esperienza E, che riassume le informazioni sulla frequenza delle risposte delle persone intervistate (la "scambiabilità" indica che non interessa l'ordine in cui si sono ottenute le risposte), convergono, molto rapidamente, verso valori sempre meno diversi delle p_i individuali, che si modificano con E attraverso la formula di Bayes, divenendo p_i', e in particolare convergono verso una opinione analoga su quale sia l'ipotesi più probabile. Questa è individuata dalla ipotesi più conforme ai risultati osservati. A questo punto si può ragionare in questo modo[12]: ciascuno dei processi bernoulliani che indicano le probabilità dei possibili risultati futuri, costruiti con i valori contenuti nelle ipotesi fatte, subordinatamente a queste deve, ovviamente, prevedere l'indipendenza stocastica (subordinata), mantenendo quindi costanti ciascuna delle probabilità previste dalle ipotesi, ma la probabilità iniziale p(A) si modifica con E (divenendo p(A/E)), perché si ottiene dalla media dei valori ottenuti considerando le probabilità delle ipotesi p_i', modificate da E. Per il futuro dunque si ottiene un processo che risulta, in questo modo, la media di quelli bernoulliani considerati.

Si presentano ora altre due domande del questionario, indicato in a), relative all'esempio più semplice che è possibile costruire sul nostro argomento:

[12] Si può ragionare in modo concettualmente differente (con lo stesso risultato).

D_1) Un'urna U contiene 2 palline: bianche (B) o nere (N). Ci sono 3 tipi di composizioni possibili: NN, BN, BB e si assegna uguale probabilità (1/3) a queste 3 ipotesi. Si estrae da U una pallina a caso. Quale è la probabilità che sia bianca? (1/2, per simmetria). D_2) Dall'urna precedente U, vengono estratte: una B, che si rimette nell'urna, e poi ancora una B, anch'essa reimbussolata. Si effettua una terza estrazione. Quale è ora la probabilità di estrarre una pallina bianca B? (risposta "imprevista": 9/10 (con i calcoli indicati precedentemente)). Sostituiamo D_2) con D_2)': Dall'urna precedente U, vengono estratte: 3 B, rimesse ogni volta nell'urna, e poi 7 N con le stesse modalità. Si effettua una successiva estrazione. Qual è ora la probabilità di estrarre una pallina bianca B? Prendendo la frequenza relativa, la risposta sarebbe 3/10. Ma questo è assurdo perché delle 3 ipotesi iniziali, già dopo le prime estrazioni di colore diverso, rimane possibile solo la composizione BN e quindi la risposta giusta è 1/2, come si può ottenere anche dai calcoli indicati.

Bibliografia (sugli autori molto noti, fra quelli indicati, si riporta una sola indicazione bibliografica che rimanda a numerosi altri riferimenti)

- de Finetti B., 1970, *Teoria delle probabilità* , Einaudi.
- Fischbein E., 1975, *The intuitive sources of probability thinking in children*, Reiden.
- Freudenthal H., 1983, *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, Reidel.
- Hacking I., 1975, *The Emergence of Probability,* Cambridge University Press.
- Tall D. O. (ed.), 1991, *Advanced MathematicalThinking*, Kluwer, Holland.
- Sierpinska A., 1994, *On Understand In Mathematics,* Kluwer, Holland.
- Lakoma E., 2000, History of Mathematics in Educational Research and Mathematics Teaching, a Case of Probability and Statistics, *Abstracs of Plenary Lectures…, ICME 9*, pp. 74-75.
- Barra M., 1979, Dagli Astragali alla curva Normale, 1980, *Atti del Convegno sull'insegnamento pre-universitario della Statistica con particolare riferimento alla scuola secondaria superiore,* pp. 109-121, Bressanone.
- Barra M., 1982, (con indicazioni su due lavori su Piaget) Collegamento fra aspetti cognitivi ed emotivi nell'introduzione della probabilità. Un'ipotesi ed una esperienza didattica, *L'Educaziuone Matematica*, III – 1, pp. 46-64.
- Barra M., 1979, Approccio alla probabilità, esempi, *Quaderni CIDI* , n. 2, Franco Angeli, Milano, pp. 37-47.
- Barra M., 1990, Calcolo delle probabilità, statistica e conoscenza induttiva, *Induzioni. Demografia, probabilità, statistica a scuola*, n. 0, pp. 23-31.
- Barra M., 1991, Aspetti epistemologici e storici relativi alla "legge dei grandi numeri" e alla "legge empirica del caso" a partire dai Greci, *Induzioni. …*, n. 2, pp. 17-32.
- Barra M., 1992, Valutazioni della probabilità nella storia, Atti del Convegno:"*Il pensiero matematico nella ricerca storica italiana*", pp. 143-174.
- Barra M., 1994, Probabilità e Statistica nella scuola secondaria, *Notiziario UMI,* supplemento al n. 7, pp. 59-69.
- Barra M., 1995, Random images on mental images, nel libro '*Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education*", Edited by R. Sutherland, J. Mason, Series F, Vol. 138, Springer, pp. 263-277.
- Barra M. and Lanciano N., 1996, Probability, Statistics and Applications of Mathematics in Other Disciplines, in Malara N. et alii (eds.), *Italian Research in Mathematics Education 1988-1995*, edited by on the occasion of ICME 8, Seville, Spain, pp. 192-213.

- Barra M., 1997, La probabilità nella scuola media, verso le superiori, relazione del gruppo di lavoro sul tema: "Dalla scuola media alle superiori: continuità nell'insegnamento della matematica", *Notiziario UMI,* supplemento al n. 7, pp. 182-187.
- Barra M., 1999, Calcolo combinatorio, calcolo delle probabilità, curva a campana, entropia e piccolo teorema di Fermat, *Notiziario UMI*, Suppl. al n. 10, pp. 106-110.
- Barra M., 2000, Relationship between probability and other languages used in the sciences: the Pythagorean "Aritmo-geometry" expanded to d-dimensions and in the continuum and the discrete spaces, A didactic proposal, Poster Presentation and Exposition as a Coordinator in the Discussion Group "*Stochastical thinking, learning and teaching", Proceedings of PME*, p. 199.
- Barra M., in corso di stampa$_1$, Questioni rilevanti del calcolo delle probabilità e del suo insegnamento anche in considerazione del gioco d'azzardo, *Le Scienze e il loro insegnamento,* Le Monnier
- Barra M., in corso di stampa$_2$, Alcune questioni riguardanti l'interessamento di Galileo Galilei al Calcolo delle Probabilità, *Atti dell'Euro Symposium: Galileo 2001*.